

Borel, Émile Félix Édouard
Justin
Leçons sur les fonctions
monogènes uniformes d'une
variable complexe

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS
SUR LES
FONCTIONS MONOGÈNES
UNIFORMES
D'UNE VARIABLE COMPLEXE

PAR

ÉMILE BOREL
PROFESSEUR DE THÉORIE DES FONCTIONS A L'UNIVERSITÉ DE PARIS

RÉDIGÉES PAR GASTON JULIA



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1917

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS MONOGÈNES.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS MONOGÈNES

UNIFORMES

D'UNE VARIABLE COMPLEXE,

PAR

ÉMILE BOREL,
PROFESSEUR DE THÉORIE DES FONCTIONS A L'UNIVERSITÉ DE PARIS,

RÉDIGÉES PAR GASTON JULIA.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917



PRÉFACE.

Ces Leçons devaient paraître à la fin de 1914. M. Gaston Julia, élève sortant de l'École Normale supérieure, qui avait bien voulu se charger de les rédiger, a été glorieusement blessé en janvier 1915 ; je tiens à le remercier des soins qu'il a apportés à l'achèvement de la rédaction et à la correction des épreuves, malgré des souffrances courageusement supportées et en même temps qu'il poursuivait de remarquables travaux personnels ; j'apprécie hautement la valeur du concours de ce jeune savant sur qui l'on peut compter pour perpétuer les traditions mathématiques françaises.

Les recherches auxquelles se rattache ce petit Livre remontent à un quart de siècle; c'est en 1892 que je les ai entreprises et les premiers résultats en ont été publiés en 1894. Il n'est peut-être pas inutile d'en esquisser brièvement l'histoire.

Le point de départ est l'opposition entre les points de vue de Cauchy et de Weierstrass, dans la définition des fonctions de variable complexe que Cauchy appelle *monogènes* et Weierstrass *analytiques*. Poincaré avait construit, avec une grande ingéniosité, des expressions analytiques présentant certaines singularités et avait cru pouvoir en tirer argument pour conclure à l'impossibilité d'étendre la théorie des fonctions analytiques au delà des bornes fixées par Weierstrass, c'est-à-dire en dehors des domaines que, pour abréger, on

peut appeler *domaines* W. Dans ma Thèse [1], dont Poincaré me fit le grand honneur d'être le rapporteur, j'ai réfuté ce point de vue négatif; mais je n'étais pas encore en état de démontrer la possibilité effective de l'extension au delà des bornes du domaine W; la question qu'on avait pu croire fermée était rouverte, mais non traitée.

Cauchy avait posé les conditions de monogénéité qui restent la base de la théorie des fonctions d'une variable complexe; il avait d'autre part créé un instrument incomparable de démonstration et de recherches, l'intégrale de Cauchy, et enfin, dans l'étude des intégrales des équations différentielles, avait employé le prolongement analytique par cheminement. Le rôle de Weierstrass fut de préciser certains points de cette dernière théorie, notamment en ce qui concerne la forme des domaines; dans les premiers chapitres de ce Livre, on a développé avec tous les détails nécessaires les propriétés des domaines W. Mais, aux yeux des disciples les plus qualifiés de Weierstrass, et notamment de M. Mittag-Leffler, le principal titre de Weierstrass à leur admiration n'est pas la part qu'il a eue dans ces perfectionnements de détail : c'est la conception d'ensemble de la théorie des fonctions analytiques, comme théorie cohérente et fermée : à tout élément de fonction analytique, c'est-à-dire à toute série convergente de puissances se rattache un domaine W et à tout point de ce domaine est attaché un élément de fonction analytique; l'ensemble de ces éléments constitue une fonction, dont le domaine W est le domaine d'existence *naturel;* en dehors de ce domaine, la fonction n'existe pas; toute tentative pour percer cet Inconnaissable est vouée à l'insuccès et à la contradiction. A la suite des travaux de

---

[1] *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Paris, 1894, et *Annales e l'École Normale*, 1895

Poincaré que j'ai rappelés il y a un instant, ce point de vue paraissait universellement admis; mais tandis que Poincaré accueillait avec bienveillance le premier essai dans lequel je montrais que les limites imposées par Weierstrass n'étaient pas aussi infranchissables qu'on l'avait cru, les disciples fidèles de Weierstrass ne consentaient même pas à discuter; je me rappellerai toujours l'étonnement avec lequel je vis M. Mittag-Leffler, auquel j'avais essayé d'exposer mes projets de recherches, ne faire aucun effort pour entrer dans ma pensée et se contenter de retirer de sa malle un Mémoire de Weierstrass pour me montrer une phrase qui devait clore définitivement toute discussion : *Magister dixit*.

Ne pouvant faire ici un historique complet, je passe rapidement sur la théorie des séries divergentes. C'est encore sous l'influence de Cauchy que j'en avais entrepris l'étude; les résultats obtenus furent généralisés par M. Mittag-Leffler et par d'autres géomètres ; je montrai alors comment l'emploi de l'intégrale de Cauchy permettait à la fois la synthèse et l'extension de tous les travaux antérieurs. Dans une importante Communication faite en 1908 au 4e Congrès international des Mathématiciens, à Rome, M. Mittag-Leffler, après avoir résumé ces diverses recherches, crut devoir affirmer à nouveau le point de vue exclusivement weierstrassien; l'insistance même de ses affirmations témoignait cependant de la crainte que les résultats rappelés par lui ne contredisent sa thèse ; le principal de ces résultats est développé au Chapitre III de ce Livre : c'est la sommation d'une série de Taylor divergente au delà de la limite « naturelle » imposée par la théorie de Weierstrass.

Il faut reconnaître cependant que, en 1908, la réfutation des affirmations de M. Mittag-Leffler ne pouvait pas être décisive ; c'est l'extension de l'intégrale de Cauchy aux domaines appelés C, par opposition aux domaines W,

qui a permis de démontrer d'une manière complète que les fonctions monogènes définies dans ces domaines possèdent les propriétés caractéristiques des fonctions analytiques de Weierstrass et que par suite la limitation de Weierstrass est purement arbitraire. La définition des domaines C et les propriétés des fonctions monogènes dans ces domaines sont exposées dans les derniers chapitres de ce Livre ; dans la Note I, j'ai précisé certains points qui n'avaient pas été développés dans les publications antérieures, et cherché à donner des principes essentiels de la théorie nouvelle une exposition à la fois rigoureuse et claire.

La théorie des fonctions monogènes non analytiques laisse subsister, bien entendu, tout ce qu'il y a de positif dans la théorie des fonctions analytiques de Weierstrass. Mais cette partie positive de la théorie de Weierstrass ne se distingue que par des détails de la théorie de Cauchy, qui utilisait aussi le prolongement analytique pour les équations différentielles ; c'est à son côté négatif que la théorie de Weierstrass devait ce caractère de perfection logique tant admiré par ses adeptes ; en substituant les domaines C aux domaines W, on doit renoncer à ce caractère, car on ne pourra vraisemblablement jamais fixer les limites exactes au delà desquelles une extension nouvelle est impossible ; quelques-uns regretteront peut-être qu'il en soit ainsi, mais il n'est pas en notre pouvoir que les choses soient autrement.

Les calculs à effectuer sur des séries convergentes pour cette extension dans les domaines C sont plus aisés à décrire qu'à exécuter ; ils partagent ce caractère avec tous les calculs sur les séries convergentes et en particulier avec ceux sur lesquels repose la théorie de Weierstrass ; sauf dans des cas très particuliers, c'est seulement la possibilité de ces calculs qu'on utilise. Mais, pour l'étude de chaque fonction, on se sert d'expressions analytiques dont la variété correspond à la

variété des propriétés essentielles des fonctions; parfois même on a avantage à ne pas employer d'expression analytique, et à étudier directement l'équation différentielle ou fonctionnelle qui définit la fonction.

C'est au Congrès de Cambridge, en 1912, que j'ai fait connaître les résultats principaux de la théorie des fonctions monogènes non analytiques ; mais c'est seulement dans le Cours dont ce Livre est la reproduction que j'ai pu développer complètement la théorie, en entrant dans le détail des démonstrations et ne laissant dans l'ombre aucun point délicat.

J'aurais voulu, presque en même temps que ce Livre, en publier un autre dans lequel auraient été exposées les applications de ces théories aux problèmes de la physique moléculaire. Je dois me borner à renvoyer à la Note II de cet Ouvrage et à la Note VII de mon *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, et je suis obligé d'ajourner l'étude d'ensemble jusqu'au moment où la victoire de la civilisation dans la lutte imposée, voici 3 ans, par une agression brutale nous donnera le droit de reprendre nos pensées et nos travaux du temps de paix.

ÉMILE BOREL.

4 août 1917.

INDEX.

Pages.

Chap. I. — Introduction. Généralités 1

Chap. II. — Application de l'intégrale de Cauchy au développement en série de polynomes d'une fonction définie dans un domaine de Weierstrass 24

Chap. III. — Quelques conséquences remarquables du développement en série de polynomes. L'extension de la théorie du prolongement analytique 55

Chap. IV. — Les ensembles de mesure nulle 73

Chap. V. — Les domaines C. Les fonctions monogènes non analytiques définies dans les domaines de Cauchy .. 125

Note I. — Sur l'extension de la formule de Green aux ensembles parfaits discontinus 151

Note II. — Sur la théorie du potentiel logarithmique 161

Table des matières 165

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS MONOGÈNES

UNIFORMES

D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION. GÉNÉRALITÉS.

La notion de fonction est à l'heure actuelle une notion abstraite. L'évolution qui l'a conduite à ce point est facile à suivre.

Au XVIIIe siècle, Euler définissait les fonctions comme résultant de l'application d'un nombre fini ou d'une infinité d'opérations de l'Algèbre (addition, multiplication, élévation aux puissances entières ou fractionnaires, positives ou négatives) ou de l'Analyse (différentiation, intégration) à une ou plusieurs variables.

Par la Physique mathématique s'introduisit le concept de fonction arbitraire. On connaît la fameuse polémique que suscita l'intégration par d'Alembert de l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

sous la forme

$$u = f(x + t) + f_1(x - t),$$

f et f_1 étant deux *fonctions arbitraires* d'une variable.

Un peu plus tard, Bernoulli et Fourier intégrèrent l'équation précédente par les séries trigonométriques, et Fourier montra que, sous des conditions très larges, une « fonction arbitraire » était représentable par une série trigonométrique.

Avec Dirichlet et Riemann, on conçut la notion de fonction

comme une correspondance arbitraire *a priori* entre les variables et la fonction. Cette large conception montra toute sa fécondité entre les mains de Riemann.

Il n'est cependant pas inutile de rappeler que dans cette conception, tout comme dans d'autres plus simples, comme celle des nombres incommensurables, il y a une illusion sur le degré de généralité qu'on peut atteindre.

Pour préciser, en effet, l'étendue de ce qu'on étudie quand on parle des nombres incommensurables les plus généraux ou des fonctions les plus générales, il est essentiel de rappeler la notion, due à Cantor, de puissance d'un ensemble.

On dit que deux ensembles d'éléments ont même puissance si l'on peut établir une correspondance biunivoque et réciproque entre tous les éléments du premier et tous les éléments du deuxième.

Par exemple, l'ensemble des entiers

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n,\quad \ldots$$

a même puissance que l'ensemble des nombres pairs

$$2,\quad 4,\quad 6,\quad \ldots,\quad 2n,\quad \ldots$$

ou que l'ensemble des nombres

$$2^1,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad \ldots,\quad 2^n,\quad \ldots.$$

Nous n'insistons pas sur la différence qu'il y a entre « concevoir comme possible » la correspondance qu'on peut établir entre les deux ensembles et la « donner effectivement ». La puissance qui s'est présentée à nous dans les exemples précédents, puissance de l'ensemble des entiers positifs, est dite *puissance du dénombrable*.

L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

Considérant tous les nombres DISTINCTS de la forme $\frac{p}{q}$, on les rangera par classes : dans la première, on mettra les nombres pour lesquels $p+q=2$; dans la deuxième, ceux pour lesquels

(1) On n'écrira pas le même nombre deux fois : si $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$, on n'écrira le nombre que dans la classe pour laquelle $p+q$ est le plus petit.

$p+q=3$ [1], etc. Dans chaque classe, on rangera les nombres par ordre de grandeur croissante, chaque classe comportant un nombre fini de nombres. On aura ainsi rangé dans un ordre déterminé tous les nombres rationnels, chacun d'eux ayant un rang bien déterminé. Ce rang établit la correspondance entre les nombres rationnels et les nombres entiers [1].

On démontre plus généralement que l'ensemble des combinaisons obtenues en prenant un nombre fini déterminé d'éléments parmi une infinité d'éléments donnés est dénombrable.

D'autre part, si au lieu d'envisager les dix caractères du système décimal on envisage un système de numération à un nombre quelconque bien déterminé de caractères, l'ensemble de toutes les combinaisons d'un nombre fini de caractères (ce nombre de caractères pouvant être aussi grand qu'on voudra et pour cela il est évident qu'on pourra prendre plusieurs fois le même caractère) est dénombrable, puisque chacune de ces combinaisons peut être regardée comme un nombre entier écrit dans le système considéré.

Par exemple, les lettres de l'alphabet, les signes opératoires étant en nombre limité, l'ensemble le plus général exprimable par par des mots est dénombrable.

Et pourtant, si l'on envisage l'ensemble des points qui sont situés sur le segment (01), cet ensemble n'est pas dénombrable.

Si, en effet, on suppose qu'on ait pu ranger tous les nombres compris entre 0 et 1, écrits sous forme décimale, on peut former un nombre décimal dont le premier chiffre décimal diffère du premier chiffre du premier nombre écrit, dont le deuxième chiffre diffère du deuxième chiffre du deuxième nombre écrit, etc. Ce nombre sera certainement distinct de tous les nombres écrits et il est entre 0 et 1.

Donc, de quelque façon qu'on cherche à ranger tous les nombres compris entre 0 et 1, il y a un nombre qui échappe à la classification; c'est dire que l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 1 n'est pas dénombrable; on dit qu'il a la puissance du continu.

---

(1) Pour des développements plus étendus sur les résultats résumés dans cette page et la suivante, on pourra se reporter à mes *Leçons sur la théorie des fonctions* (deuxième édition, notamment Note IV et Note VI).

Si nombreux donc que soient les mots dont pourront se servir les hommes, il sera toujours impossible de définir d'une façon précise *tous* les nombres compris entre *zéro* et *un*.

Dans les raisonnements mathématiques interviennent souvent des nombres irrationnels, les nombres algébriques tels que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, les nombres transcendants tels que π, e, et l'on peut imaginer que, par des procédés de plus en plus compliqués, on puisse définir de façon précise de plus en plus de nombres incommensurables, c'est-à-dire prononcer assez de paroles pour que l'on puisse s'entendre sur le sens qu'il faut attacher aux symboles par lesquels on représente ces nombres. Il y aura toujours des incommensurables non définis, et l'on peut se demander s'ils interviennent dans les raisonnements mathématiques. En fait, tout se passe comme s'ils n'intervenaient pas, car jamais on ne les fait intervenir effectivement. Une formule algébrique s'exprime, en effet, toujours par des lettres a, b, c, ... On peut imaginer que a, b, c sont des nombres appartenant à cette catégorie de nombres non définis; alors le nombre x, donné par la formule, ne sera pas défini. Mais ce fait n'a pas d'intérêt pratique. Il suffit de savoir que la formule s'applique à tous nombres a, b, c, ... quels qu'ils soient, définis, ou encore à définir.

Ce qu'on vient de dire des nombres se répète des fonctions *a fortiori*, car l'ensemble des fonctions, conçues selon Riemann, a une puissance bien supérieure à celle du continu.

En effet si par un moyen quelconque on pouvait, à tout nombre x_0 compris entre 0 et 1, attacher une fonction que nous désignerons par $f_{x_0}(x)$, il serait facile de définir une fonction différant de toutes les fonctions précédentes; il suffirait de choisir $\varphi(x)$ tel que

$$\varphi(x_0) \neq f_{x_0}(x_0);$$

φ différerait de toute fonction de la classe précédente; le raisonnement, tout pareil à celui qui prouve que l'ensemble (01) n'est pas dénombrable, montre que l'ensemble des fonctions a une puissance supérieure à la puissance du continu.

La conclusion à laquelle nous arrivons est donc la suivante :

Entre la définition que donnait Euler, d'après laquelle une fonction résultait par certaines opérations déjà connues ou « encore

à imaginer » d'une ou plusieurs variables, et la définition toute abstraite de Riemann, la différence réelle est moins grande qu'on ne croirait. La définition abstraite, serrée de près, ne contient pas beaucoup plus que la première, vu notre incapacité de dépasser une certaine *puissance de définition*.

LA FONCTION MONOGÈNE D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

Avant Cauchy on connaissait les fonctions élémentaires, les séries simples d'une variable complexe $z = x + iy$. Cauchy, le premier, conçut les fonctions plus générales et la notion de monogénéité : Il ne précise pas si la correspondance entre la fonction et la variable est définie par un procédé analytique ou si, comme le fait Riemann, elle est arbitraire.

Si à chaque valeur de $z = x + iy$ correspond une valeur pour la fonction Z, nous pouvons poser

$$Z = P(x, y) + iQ(x, y),$$

P et Q étant fonctions de x et de y.

Si P et Q sont simplement des fonctions continues de x et de y, on a là une fonction continue qu'on peut représenter par une série de polynomes en z. Elle n'est pas monogène, en général.

Cauchy remarque que les fonctions élémentaires $Z = R(z)$ peuvent être dérivées suivant les règles du calcul ordinaire par rapport à z, c'est-à-dire que la quantité

$$\frac{R(z+h) - R(z)}{h}$$

tend vers une limite bien déterminée, *quelle que soit la façon dont h tende vers zéro*, que z et h soient réels ou complexes. Il est facile de voir que, pour une fonction

$$Z = P(x, y) + iQ(x, y),$$

ceci exige des conditions particulières. Si à x et y on donne en effet des accroissements quelconques dx, dy,

$$dz = dx + i\,dy,$$

on a

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)}{dx + i\,dy}$$

et si dx et dy tendent vers zéro avec h en sorte que $\frac{dy}{dx}$ tende vers m, $\frac{dZ}{dz}$ tend vers la limite

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} + m\frac{\partial P}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + m\frac{\partial Q}{\partial y}\right)}{1 + im}$$

qui en général dépend de m.

Pour qu'elle n'en dépende pas, c'est-à-dire pour que la fonction Z soit monogène, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = -i\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

ce qui donne les conditions classiques sous lesquelles une fonction $Z(z)$ a une dérivée indépendante de la direction suivant laquelle on fait varier z:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ces conditions, ainsi qu'on s'en assure aisément, sont vérifiées par les fonctions élémentaires.

Dans la première partie de ce cours, nous supposerons ces conditions vérifiées dans toute une région du plan de la variable complexe z.

Sous ces hypothèses, Cauchy a déduit toute une théorie générale des fonctions monogènes. On a cru longtemps que les conséquences qu'il a tirées, et notamment ce fait important, que de l'existence de la dérivée première dans un domaine D, on peut conclure à l'existence des dérivées de tout ordre, exigeaient, outre l'existence de la dérivée première, la continuité de cette dérivée dans D. M. Goursat a démontré, et c'est un résultat d'une grande importance pour les principes de la théorie, que :

La continuité de la dérivée première est une conséquence de son existence.

Il a démontré en effet, en supposant seulement l'*existence* de la dérivée, *le théorème fondamental de Cauchy*, à savoir : *si une fonction* $f(z)$ *est monogène dans une aire* D, *le long de tout contour* C *tracé dans ce domaine, l'intégrale* $\int_C f(z)\,dz$ *est nulle*.

Avant d'aborder la démonstration donnons quelques préliminaires qui feront mieux comprendre son mécanisme.

Si l'on a une fonction $y=\varphi(x)$ de la variable réelle x dans (a, b) ayant une dérivée en chaque point x_0 de cet intervalle (extrémités comprises), c'est dire que ε étant donné positif arbitrairement, on peut déterminer η positif tel que $|x-x_0|<\eta$ entraîne

$$(1)\qquad \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}-\varphi'(x_0)\right|<\varepsilon \quad [1].$$

Un théorème fondamental est le suivant : « Si ε est donné, on peut diviser (a, b) en un nombre fini d'intervalles, tels que dans chacun d'eux existe un point x_0 pour lequel la relation (1) soit vérifiée, quel que soit x, dans l'intervalle comprenant ce point x_0. »

Le lecteur familier de la théorie des ensembles reconnaîtra là un théorème classique. Tout point x_0 de (a, b) est intérieur à un intervalle $(x_0-\eta, x_0+\eta)$ où la relation (1) est vérifiée, et un théorème aujourd'hui classique nous apprend qu'alors on peut trouver un nombre fini des précédents intervalles recouvrant tout l'intervalle (a, b).

Il est d'ailleurs facile de démontrer ce théorème par l'absurde [2]. Si le théorème n'était pas exact pour (a, b), ε étant donné, il ne le serait pas non plus pour une au moins des deux moitiés de (a, b). Raisonnant sur cette moitié comme sur (a, b) et continuant le processus, on aurait des intervalles emboîtés tendant vers un point limite ξ, et dans chacun desquels le théorème énoncé serait faux. Ceci contredit le fait que ξ est intérieur à un certain

---

[1] Pour l'extrémité a ou b, on aura un intervalle $(a, a+\eta)$ ou $(b, b-\eta)$, dans lequel la relation (1) aura lieu.

[2] *Voir* ÉMILE BOREL, *Thèse*, Paris, 1894.

intervalle dans lequel

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{x - \xi} - \varphi'(\xi) \right| < \varepsilon,$$

et la contradiction démontre le théorème.

Dans chacun des intervalles précédents en nombre fini, on aura

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0)[\varphi'(x_0) + \varepsilon_1] \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_1| < \varepsilon.$$

La démonstration est la même si, au lieu d'une variable réelle x dans un segment (a, b), on a une variable complexe dans un domaine D.

Soit $Z = f(z)$ ayant une dérivée en tout point de D et de son contour, ε étant donné, on peut diviser D en un nombre fini de régions dans chacune desquelles existe z_0 tel que, quel que soit z dans la région comprenant ce point z_0, on ait

$$(2) \qquad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Enfermons D dans un carré, que nous divisons en petits carrés.

Parmi les carrés intérieurs à D, ou ayant une partie commune avec D, s'il y en a pour lesquels il existe un point intérieur z_0 satisfaisant à (2), nous n'y toucherons pas. S'il existe des carrés ne satisfaisant pas à (2), nous les diviserons en 4, puis en 16, etc., chaque carré ne satisfaisant pas à (2) étant divisé jusqu'à ce qu'on trouve z_0 satisfaisant à (2). Si, dans un carré, le processus ne se limitait pas, les carrés de division tendraient vers un point limite intérieur à D ou sur son contour, et dans une certaine région entourant ce point on aurait (2), ce qui serait contradictoire.

Si la division initiale a été faite en carrés de côté inférieur à λ, on voit que, *quels que soient* ε *et* λ, *on peut diviser l'aire* D *en un nombre fini de carrés ou portions de carrés de côté inférieur à* λ *tels que, dans chacune de ces petites régions, existe un point* z_0 *satisfaisant à* (2).

Grâce à ce lemme, il est facile de démontrer que $\int_C f(z)dz = 0$ pour tout contour C intérieur à D.

En effet, on voit de suite que, si l'on envisage les carrés en nombre fini intérieur à C ou ayant seulement une partie commune avec C, l'intégrale le long de C égale la somme des intégrales

$\int f(z)\,dz$ prises le long du contour γ de chacune des régions en nombre fini suivant lesquelles on a décomposé l'aire intérieure à C.

Sur chacun de ces contours γ, on peut écrire

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \varepsilon_1 (z - z_0) \qquad |\varepsilon_1| < \varepsilon.$$

Sur tout contour γ on a

$$\int_\gamma f(z_0)\,dz = f(z_0) \int_\gamma dz = 0$$

et

$$f'(z_0) \int_\gamma (z - z_0)\,dz = 0,$$

ainsi qu'un calcul élémentaire le prouve.

Donc

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \varepsilon_1 (z - z_0)\,dy.$$

Pour un carré de côté $\lambda_1 < \lambda$ tout entier intérieur à C, on a

$$\left| \int_\gamma \varepsilon_1 (z - z_0)\,dz \right| < 4\varepsilon\lambda^2\sqrt{2},$$

puisque

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |z - z_0| < \lambda_1\sqrt{2}, \text{ diagonale du carré,}$$

$4\lambda_1$ étant le périmètre. Donc, la somme des intégrales analogues est inférieure à

$$4\varepsilon\sqrt{2}\,S,$$

S étant l'aire totale intérieure à C.

Pour les carrés dont une partie est extérieure à C, si σ' désigne la longueur de la portion de C qui intéresse un tel carré, on a le long du contour γ' de la portion du carré intérieure à C

$$\int_{\gamma'} f(z)\,dz = \left| \int_{\gamma'} \varepsilon_1 (z - z_0)\,dz \right| < \varepsilon\lambda_1\sqrt{2}(4\lambda_1 + \sigma'),$$

λ_1 désignant toujours le côté du carré. La somme de ces intégrales est inférieure à

$$\varepsilon\sqrt{2}(4S' + L\lambda),$$

λ étant la limite supérieure des λ_1, S' la surface intérieure aux carrés

qui chevauchent C (*qui tend vers zéro avec* λ), L la longueur de C. Or on peut choisir ε arbitrairement petit; on voit donc que l'on peut, en choisissant ε et λ assez petits, rendre

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| < \varepsilon\sqrt{2}\,[4S + 4S' + L\lambda]$$

aussi petit qu'on voudra. $\int_C f(z)dz$ ayant d'ailleurs une valeur fixe indépendante du mode d'opération précédent, on voit que

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

LES DOMAINES DE WEIERSTRASS.

Nous avons dit plus haut que nous supposions les conditions de monogénéité vérifiées dans toute une région D du plan de la variable z; il importe de préciser ce qu'on entend ainsi par « domaine naturel d'existence » d'une fonction monogène; c'est à Weierstrass que l'on doit d'avoir précisé cette notion. Nous allons donner les propriétés des domaines que nous appellerons « domaines W » ou domaines de Weierstrass, indépendamment des fonctions qui les admettent pour domaines d'existence.

Comme nous ne nous occuperons dans ces Leçons que de fonctions uniformes, nous laisserons de côté les domaines se recouvrant partiellement. Nous n'envisageons que des domaines ne se recouvrant nulle part. Un tel domaine sera de Weierstrass si les deux conditions suivantes sont remplies :

1° a étant un point quelconque du domaine, on peut tracer un cercle de centre a dont tous les points appartiennent au domaine. On dit quelquefois qu'un tel domaine est « ouvert ».

2° Le domaine est d'un seul tenant, c'est-à-dire a et b étant deux points quelconques du domaine, on peut trouver un nombre fini de cercles, le premier de centre a, le dernier de centre b, ayant deux à deux une partie commune, tous ces cercles étant intérieurs au domaine. Par exemple, les points intérieurs à un cercle (points de la circonférence exclus) forment un domaine W, car il est ouvert et d'un seul tenant; si les points de la circonférence font

partie du domaine, ce domaine sera fermé et ne sera plus de Weierstrass.

Quant à la première condition énoncée, il revient au même de supposer que les points de la circonférence de centre a appartiennent ou non au domaine. Nous pouvons donc supposer sans inconvénient qu'ils y appartiennent.

Propriétés des domaines W. — L'étude des domaines W et des fonctions qui y existent, est simplifiée par le théorème fondamental suivant :

Théorème. — *Si un domaine* D *est ouvert, c'est-à-dire si autour de tout point a du domaine on peut tracer une circonférence de centre a dont tous les points* (circonférences comprises) *soient intérieurs au domaine* D, *on peut, parmi ces circonférences, en trouver une infinité dénombrable qui comprennent à leur intérieur tous les points du domaine.*

Ce théorème s'applique aux domaines W puisqu'ils sont ouverts.

La démonstration résultera d'un certain nombre de propriétés des ensembles.

On sait qu'un ensemble est fermé si tout point limite de l'ensemble appartient à l'ensemble.

Exemple : L'ensemble des points o et $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est fermé.

Le théorème suivant caractérise les ensembles fermés :

Si un ensemble fermé est tel qu'on puisse fixer une infinité de domaines (*segments sur une droite, carrés ou circonférences dans le plan, ...*), *tels que tout point de l'ensemble fermé soit intérieur à l'un de ces domaines* (*ou sur sa frontière, c'est-à-dire intérieur au sens large*), *il est possible de choisir un nombre fini des domaines précédents ayant la même propriété.*

On a donné de ce théorème diverses démonstrations que le lecteur trouvera dans les *Leçons sur la théorie des fonctions*, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, valables pour l'ensemble linéaire formé par les points d'un segment de droite (a, b). On peut supposer que les domaines de l'énoncé sont en infinité dénombrable (le cas de l'infinité non dénombrable s'y ramenant).

Donnons ici une démonstration très simple, pour un ensemble fermé linéaire quelconque (E) et qui s'étend sans modification aux ensembles de points dans des espaces à plusieurs dimensions.

Envisageons les intervalles A_1B_1; A_2B_2; ... de l'énoncé. Il existe un nombre K tel que tout point de l'ensemble (E) soit intérieur à un intervalle d'indice $< K$. Si en effet K n'existait pas, il n'existerait pas non plus pour l'ensemble des points de (E) intérieurs à l'un des segments moitiés du segment qui porte (E); en continuant ce raisonnement, on aurait des intervalles emboîtés, ayant pour point-limite un point μ de (E). Ce point étant intérieur à un certain intervalle A_hB_h, à partir d'un certain instant, dans la division précédente, tous les points du segment de la division qui porte μ seraient intérieurs à A_hB_h et le nombre K serait h lui-même. La contradiction évidente démontre notre théorème.

Nous avons dit que le théorème précédent était caractéristique des ensembles fermés. Il suffit en effet de montrer par un exemple que ce théorème n'est pas vrai pour un ensemble non fermé.

Prenons l'ensemble des points d'abscisse $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Il n'est pas fermé.

On peut entourer chaque point $\frac{1}{n}$ d'un intervalle

$$\left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}\right), \quad \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right)\right]$$

qui ne contienne que ce point de l'ensemble. Et il est impossible de trouver un nombre fini de ces intervalles contenant à leur intérieur tous les points de l'ensemble.

Considérons maintenant des ensembles non nécessairement fermés. *Si chaque point de l'ensemble est intérieur à un domaine déterminé, on peut trouver une* INFINITÉ DÉNOMBRABLE *de ces domaines comprenant à leur intérieur tous les points de l'ensemble.*

Démontrons ce théorème pour un ensemble à deux dimensions.

Soit un ensemble de points intérieurs à une aire plane finie qu'on peut supposer être un carré et supposons que, à chaque point A de l'ensemble, correspond un cercle C de centre A et de rayon r.

Je dis d'abord que si les rayons de tous ces cercles C sont supé-

rieurs à une limite fixe ρ, on peut choisir un *nombre fini de ces cercles* renfermant à leur intérieur tous les points de l'ensemble. Car si cela n'avait pas lieu pour le carré initial, la propriété serait aussi en défaut pour un des quatre carrés obtenus en le divisant en quatre parties égales, etc. On continuera le processus jusqu'à ce qu'on arrive à un carré de diagonale $< \rho$, dans lequel la propriété soit en défaut, ce qui constitue une contradiction, d'où la proposition énoncée.

Si alors nous désignons par E l'ensemble donné et si nous choisissons une suite de nombres positifs $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ décroissants et tendant vers zéro : soient E_1 *l'ensemble des points* A *pour lesquels les rayons r des cercles correspondants sont* $\geqq \rho_1$; E_2 *l'ensemble des points* A *pour lesquels les rayons r des cercles correspondants sont compris entre* ρ_1, ρ_2 ; E_3 *l'ensemble de ces points pour lesquels* $\rho_2 > r \geqq \rho_3$, etc. ; il est clair que

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots.$$

Pour E_1 on peut (lemme précédent) parmi les cercles correspondants en choisir un nombre fini tel que tous les points de E_1 soient intérieurs à ces cercles. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ces cercles qu'on peut ranger par une règle précise, par exemple en s'aidant des coordonnées du centre. On fera de même pour E_2, etc., on aura ainsi une infinité dénombrable de cercles. Tout point A de E étant centre d'un cercle de rayon r, r étant toujours compris entre deux nombres de la suite des ρ_i, appartiendra à un des ensembles E_n, et par suite sera intérieur à un des cercles de la suite dénombrable trouvée ci-dessus.

On voit donc qu'on peut toujours, pour un ensemble quelconque, remplacer une infinité non dénombrable de cercles par une infinité dénombrable. C'est pourquoi nous avons dit, lors de la démonstration du théorème sur les ensembles fermés, que le cas où l'infinité des domaines attachés aux points de l'ensemble n'était pas dénombrable se ramène au cas où elle est dénombrable.

Il suffit d'appliquer ces résultats à un domaine de Weierstrass, qui est un ensemble ouvert, pour obtenir le théorème annoncé au début du paragraphe. Tout point A d'un tel domaine étant intérieur à un cercle C dont tous les points (circonférence comprise) sont intérieurs au domaine, on peut choisir une infinité dénom-

brable de ces cercles C_1, C_2, ..., tels que tout point du domaine soit intérieur à l'un au moins de ces cercles (et non sur la circonférence). Remarquons que, chacun des points de la circonférence C_1 étant intérieur au domaine est intérieur à un cercle au moins de la série C_2, C_3, ... Nous verrons que l'hypothèse que le domaine est d'un seul tenant entraîne la possibilité de ranger *tous* les cercles en une chaîne continue de telle manière que chacun d'eux renferme une portion de l'un des précédents. *Tout point du domaine* W *est intérieur à l'un de ces cercles, et tout point appartenant à l'intérieur ou à la circonférence d'un tel cercle est de* W. *L'ensemble dénombrable* C_1, C_2, C_3, ... *définit donc de façon précise le domaine de Weierstrass.*

Cette équivalence entre les points intérieurs à un domaine W, et les points intérieurs à une infinité dénombrable de cercles formant une suite continue de l'espèce indiquée précédemment, n'a pas lieu pour les ensembles fermés.

Envisageons par exemple l'ensemble E des points intérieurs à un cercle Γ ou situés sur sa circonférence; c'est un ensemble fermé. Si à chaque point de cet ensemble on adjoint un cercle qui le contient, on peut parmi ces cercles en choisir *un nombre* FINI contenant tous les points de l'ensemble, mais alors ces cercles déborderont sur la frontière de Γ et comprendront d'autres points que ceux de l'ensemble E, ou bien si on les prend tangents intérieurement à Γ pour n'avoir dans les cercles choisis ou sur leurs circonférences que des points de l'ensemble, de sorte que les points de l'ensemble E situés sur la circonférence Γ soient *sur* le cercle qui est tangent à Γ en ce point, il faudra, pour avoir tous ces points, prendre autant de circonférences données qu'il y a de points sur la frontière de Γ, c'est-à-dire une infinité non dénombrable.

Les ensembles fermés sont donc en un sens plus simples, mais ne comportent pas la représentation par une infinité dénombrable de cercles qu'admettent les domaines ouverts de Weierstrass.

Reprenons la suite dénombrable de cercles C_1, C_2, ..., C_n, ..., dont les points intérieurs définissent un domaine W; je dis qu'on peut changer le numérotage de ces cercles de telle façon que, dans le nouveau numérotage, les cercles Γ, Γ_1, Γ_2, ..., Γ_n forment un domaine d'un seul tenant quel que soit n.

Partons de C_1, appelons-le Γ_1; parmi les cercles de la suite C_2,

$C_3, \ldots,$ qui coupent C_1, il y en a un dont l'indice est le plus petit; appelons-le Γ_2; appelons de même Γ_3 le cercle du plus petit indice choisi dans la suite $C_1, C_2, \ldots,$ moins Γ_1 et Γ_2, qui coupe le domaine $\Gamma_1 \Gamma_2$, et continuons ce processus indéfiniment.

Tout cercle C_p recevra un numéro déterminé dans la suite Γ_i.

En effet, C_p peut être réuni à C_1 par une chaîne d'un nombre fini de cercles C_n; deux à deux sécants, soient $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ les indices de ces cercles.

Dans le nouveau numérotage, C_{n_1} recevra un indice au plus égal à n_1, C_{n_2} un indice au plus égal à $n_1 + n_2$, C_{n_3} un indice au plus égal à $n_1 + n_2 + n_3$; C_p recevra donc dans la suite Γ_i un indice au plus égal à la somme $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k + p$. Tout cercle C figure donc dans la suite des Γ_i.

Au cas où le cercle C de plus petit indice coupant le domaine $\Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_{n-1}$ (et distinct de chacun des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}$) serait tout entier intérieur à ce domaine, on l'omettrait sans inconvénient.

Tout cercle de la suite C_n étant ainsi incorporé à un rang déterminé dans la suite $\Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_p, \ldots,$ on voit que le domaine de Weierstrass est la limite du domaine intérieur (frontières comprises) aux cercles, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$, quand p augmente indéfiniment. Appelons D_p ce domaine intérieur aux cercles Γ_1, $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$. D_p est d'un seul tenant et limité par un nombre fini d'arcs de cercle. Tout point du domaine de Weierstrass est intérieur à D_p si p est pris assez grand; D_{p+1} comprend tous les points de D_p et $\lim\limits_{p=\infty} D_p$ fournit le domaine W.

Donnons encore quelques propriétés de l'ensemble complémentaire d'un domaine de Weierstrass, et plus généralement de l'ensemble complémentaire d'un *domaine ouvert*.

Cet ensemble complémentaire formé de points qui n'appartiennent pas au domaine W est évidemment fermé, puisque tout point-limite de points n'appartenant pas à (W) ne peut appartenir à (W).

Or, les ensembles fermés jouissent d'une propriété remarquable connue sous le nom de « théorème de Cantor-Bendixson » :

Tout ensemble fermé est la somme d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable.

Pour le démontrer, introduisons la notion de « point de con-

densation » due à M. E. Lindelöf. Un point sera dit *point de condensation* si, dans tout cercle ayant pour centre ce point, si petit soit-il, il y a une infinité non dénombrable de points de l'ensemble ([1]). Tout point d'une courbe continue par exemple est point de condensation de l'ensemble des points de cette courbe.

Tout ensemble non dénombrable de points a au moins un point de condensation à distance finie ou infinie. On peut en effet se ramener par une inversion au cas d'un ensemble borné, et alors le procédé de divisions successives utilisé pour le « lemme de Weierstrass-Bolzano », et utilisé plusieurs fois dans ces Leçons, montre de suite l'existence du point de condensation. On peut aussi appliquer ce qui a été vu sur les ensembles quelconques. Si aucun point intérieur à la région contenant l'ensemble n'était de condensation, on pourrait trouver un cercle centré en ce point et ne contenant qu'une infinité dénombrable de points de l'ensemble. On a vu plus haut qu'on pouvait remplacer tous ces cercles par une infinité dénombrable d'entre eux renfermant tous les points de la région considérée et en particulier tous les points de l'ensemble. Chacun de ces derniers cercles ne renfermant qu'une infinité dénombrable de points de l'ensemble, cet ensemble serait dénombrable, ce qui va contre l'hypothèse.

Il est facile de voir que tout point-limite A de points de condensation d'un ensemble est lui-même point de condensation, puisque à l'intérieur de tout cercle de centre A il y a au moins un point de condensation α, qu'on peut par suite entourer d'un cercle intérieur au cercle précédent, et contenant une infinité non dénombrable de points de l'ensemble. C'est dire que l'*ensemble des points de condensation d'un ensemble quelconque est fermé*. Considérons alors un ensemble fermé quelconque F du plan. Soient P l'ensemble de ses points de condensation (ils sont de F, car P est fermé), D l'ensemble des points obtenus en retranchant P de D,

$$F = P + D.$$

P est parfait et D dénombrable.

On a vu que P était fermé, c'est-à-dire que tout point-limite de points de P appartient à P. Il reste à démontrer que tout point

([1]) Dans un domaine à trois dimensions, on remplacerait le cercle par une sphère et rien ne serait changé.

de P est limite de points de P. Car considérons un point A de P et deux cercles Σ_n, Σ'_n de centre A, de rayons $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$. Entre ces deux cercles il ne peut y avoir un nombre fini ou une infinité dénombrable de points de F *quel que soit n*, car alors, dans un cercle de centre A, de rayon assez petit, on n'aurait qu'une infinité dénombrable de points de F (une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables donnant un ensemble dénombrable) et A ne serait pas un point de condensation de F. Il y a donc des valeurs de *n aussi grandes qu'on veut* pour lesquelles entre Σ_n et Σ'_n il y a une infinité non dénombrable de points de F. Mais alors entre Σ_n et Σ'_n il y a au moins un point de P, et comme le rayon de Σ_n tend vers zéro on voit que A est limite de points de P.

Donc P est parfait. Il en résulte que tout point de D ne peut être limite de points de P, et par suite que D est dénombrable. En effet, la distance d'un point déterminé de D à tout point A de P a une limite inférieure $r \neq 0$. L'ensemble E des points de D pour lesquels $r > \frac{1}{n}$ est dénombrable; car, s'il ne l'était pas, il aurait un point de condensation qui serait point de condensation de F et dont la distance aux points de E ne serait pas constamment $> \frac{1}{n}$, ce qui est absurde. On peut donc classer les points de D pour lesquels $r \geqq 1$, puis ceux pour lesquels $1 > r \geqq \frac{1}{2}$, ..., $\frac{1}{n} > r \geqq \frac{1}{n+1}$, ... Chacun des ensembles partiels obtenus en infinité dénombrable est dénombrable, et tout point de D appartenant à un tel ensemble, on voit que D est dénombrable.

On a supposé F borné; on a vu plus haut qu'on pouvait toujours s'y ramener.

L'ensemble complémentaire d'un domaine W est fermé. Le théorème de Cantor-Bendixson s'y applique, et les deux ensembles P et D qu'il comporte jouent un rôle important dans la théorie des fonctions analytiques dont W est le domaine d'existence.

Il y a aussi avantage à considérer l'*ensemble frontière* d'un domaine W. La définition vaut pour tout ensemble ouvert; *son ensemble frontière est l'ensemble des points de l'ensemble complémentaire qui sont limites de points de l'ensemble ouvert proposé.*

Par exemple :

1° Si l'on envisage l'ensemble E des points *intérieurs* à un cercle C (circonférence exclue), la frontière est l'ensemble des points de la circonférence C;

2° Si l'on envisage l'ensemble E précédent moins un de ses points a, l'ensemble frontière sera composé de a et de la circonférence C.

L'ensemble frontière est fermé. Car tout point-limite de points de la frontière est limite de points de l'ensemble ouvert et n'appartient pas à l'ensemble ouvert, donc il appartient à la frontière. On peut donc décomposer cette frontière en un ensemble parfait et un ensemble dénombrable.

En particulier, si le domaine ouvert est weierstrassien, sa frontière est l'ensemble des points singuliers de la fonction analytique dont W est le domaine naturel d'existence. Et le cas où cette frontière se réduit à un ensemble dénombrable a fait l'objet d'intéressants travaux de M. Mittag-Leffler (*Acta mathematica*, t. IV).

LA REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION ANALYTIQUE DÉFINIE DANS UN DOMAINE DE WEIERSTRASS.

Le problème d'une telle représentation peut être compris de deux façons :

1° Représentation à l'aide d'éléments relatifs à des points extérieurs au domaine, relatifs en particulier aux points singuliers : c'est ce que fait M. Mittag-Leffler dans les travaux cités plus haut;

2° Représentation à l'aide d'éléments en quelque sorte intérieurs au domaine d'existence.

Ces deux points de vue s'éclairent mutuellement. Nous les emploierons concurremment.

L'élément analytique fondamental dont nous ferons usage sera l'intégrale de Cauchy, qui, comme la série de puissances dont fait usage Weierstrass, résulte d'un passage à la limite.

On a vu que le long de tout contour C intérieur au domaine W où la fonction $f(z)$ est monogène, on a

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Soient ζ un point intérieur au domaine W, D_n le contour [1] du domaine d'un seul tenant formé par les cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ (que nous avons appris à constituer), dont W est la limite pour $n = \infty$. Entourons ζ d'un cercle C_n de centre ζ et intérieur au domaine limité par D_n. Appliquons la formule précédente à la fonction $\frac{f(z)}{z-\zeta}$ monogène dans l'aire limitée par C_n et D_n et les deux bords d'une coupure infiniment étroite reliant C_n à D_n. On voit que la somme des intégrales le long des deux bords de la coupure est nulle, et il reste

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_n} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta},$$

les deux contours étant parcourus dans le sens positif des rotations.

Dans le premier membre on posera $z = \zeta + re^{i\theta}$ et il se réduit à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,d\theta$$

qui, si C_n tend vers le point ζ, tend vers $f(\zeta)$.

Passant à la limite, on a

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_n} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

L'intégrale du deuxième membre, dite *intégrale de Cauchy*, donne $f(\zeta)$ en tout point ζ intérieur à D_n connaissant ses valeurs sur D_n.

Conséquences. — 1° *La série de Taylor*. — Si au lieu de D_n on prend un cercle Γ de centre a, tout entier intérieur au domaine W, on a

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

ζ étant intérieur à Γ et fixe, z se déplaçant sur Γ, on a

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a-(\zeta-a)} = \frac{1}{z-a} + \frac{\zeta-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \ldots,$$

[1] Ce contour peut être composé de plusieurs courbes fermées en sorte que le domaine limité par D_n peut ne pas être simplement connexe.

le deuxième membre étant absolument convergent puisque

$$\lambda = \left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1.$$

En multipliant $\frac{1}{z - \zeta}$ par $f(z)\,dz$ et intégrant le long de Γ, il n'y a aucune difficulté et l'on a

$$f(\zeta) = A_0 + A_1(\zeta - a) + \ldots + A_n(\zeta - a)^n + \ldots,$$

développement valable d'après notre méthode quel que soit ζ intérieur à Γ et non sur sa frontière. Si M est le maximum de $|f(z)|$ sur Γ, on aura

$$|\zeta - a|^n |A_n| < M\lambda^n,$$

d'où

$$|A_n| < \frac{M}{R^n}, \qquad R = \text{rayon de } \Gamma.$$

Tant que ζ reste dans une région intérieure à (W) on peut sans difficulté dériver indéfiniment l'intégrale de Cauchy, et l'on voit que l'hypothèse de la seule monogénéité dans (W) montre que la fonction $f(z)$ a des dérivées de tout ordre dans (W). Elle nous donne la série de Taylor que Weierstrass a prise pour point de départ. Cette série converge *dans tout cercle de centre a intérieur au domaine* W; le plus grand de ces cercles (et il existe si l'on suppose que W n'embrasse pas tout le plan) est le *cercle de convergence* de la série de Taylor.

2° *Développement d'une fonction autour d'un point singulier isolé* (formule de Laurent). — Lorsqu'une fonction $f(z)$, monogène dans une aire, admet des points singuliers isolés dans cette aire, sur la nature desquels on ne sache rien *a priori*, on peut mettre ces points en évidence dans l'expression de $f(z)$. Soit a un de ces points. Entourons-le d'un petit cercle C_n de centre a et d'un cercle plus grand C'_n, l'aire annulaire entre C_n et C'_n étant intérieure au domaine (W) où $f(z)$ existe.

Si ζ est un point de cette aire annulaire, on a

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \frac{f(z)\,dz}{z - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(z)\,dz}{z - \zeta},$$

C_n et C'_n étant parcourus dans le sens direct. Dans la première

intégrale, puisque z décrivant C'_n on a

$$|\zeta - a| < |z - a|,$$

on peut développer $\frac{1}{z - \zeta}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{\zeta - a}{z - a}$ en série absolument convergente. L'intégration se fait terme à terme en sorte que la première intégrale donne une série de la forme

$$A_0 + A_1(\zeta - a) + A_2(\zeta - a)^2 + \ldots + A_n(\zeta - a)^n + \ldots$$

convergente certainement lorsque ζ est intérieur à C'_n.

Dans la deuxième $|z - a|$ étant $< |\zeta - a|$ quand z décrit C_n, on peut développer $\frac{1}{z - \zeta}$ en l'écrivant

$$\frac{1}{z - \zeta} = -\frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = -\frac{1}{\zeta - a} - \frac{z - a}{(\zeta - a)^2} - \ldots - \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} - \ldots$$

L'intégration se fait sans difficulté, et la deuxième intégrale donne une série de la forme

$$\frac{B_1}{\zeta - a} + \frac{B_2}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(\zeta - a)^n} + \ldots$$

qui converge sûrement quand ζ est extérieur au cercle C_n, on a donc le développement suivant valable d'après notre méthode dans l'anneau entre C_n et C'_n

$$f(\zeta) = A_0 + A_1(\zeta - a) + \ldots + A_n(\zeta - a)^n + \ldots$$
$$+ \frac{B_1}{\zeta - a} + \frac{B_2}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(\zeta - a)^n} + \ldots$$

et qu'on appelle *développement de Laurent*.

La première partie du développement représente une fonction monogène analytique dans un certain cercle de centre a. La deuxième partie représente, comme il est aisé de le voir, une série convergente *quelque petit que soit* $\zeta - a$, car C_n a été pris arbitrairement petit.

Deux cas principaux peuvent se présenter :

1° Ou bien cette deuxième partie n'a qu'un nombre limité p de

termes; alors a est dit un *pôle de* $f(z)$, et la fonction $f(z)(z-a)^p$ n'admet plus a pour pôle;

2° Ou bien cette deuxième partie a une infinité de termes et a est dit *point singulier essentiel de* $f(z)$.

Par exemple, $e^{\frac{1}{z-a}}$, $\sin\frac{1}{z-a}$ admettent $z=a$ pour point singulier essentiel.

3° Appliquons l'intégrale de Cauchy au contour d'un cercle C de centre ζ à l'intérieur et sur le contour duquel la fonction $f(z)$ est monogène, on a

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

Or, on a sur le contour C

$$z=\zeta+re^{i\theta}, \qquad dz=rie^{i\theta}\,d\theta.$$

Donc

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta+re^{i\theta})\,d\theta,$$

$f(\zeta+re^{i\theta})$ représente la valeur de f sur le cercle, c'est une fonction de θ; désignons-la par $\varphi(\theta)$

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta}{\displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta}.$$

Le deuxième membre est la valeur moyenne de la fonction $\varphi(\theta)$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$; puisque

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta=\lim_{n=\infty}\frac{2\pi}{n}\left\{\varphi(0)+\varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\varphi\left[(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]\right\},$$

on a

$$f(\zeta)=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\left\{\varphi(0)+\varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\varphi\left[(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]\right\}.$$

Marquons sur le cercle C les points $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ correspondant à des angles θ respectivement égaux à $0, \frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{2\pi}{n}$,

$$f(\zeta)=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\left[\varphi(A_0)+\ldots+\varphi(A_{n-1})\right].$$

Cauchy appelle les expressions du deuxième membre des *moyennes isotropiques;* ce sont des moyennes étendues aux sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle C. A_0 n'a évidemment aucun rôle particulier dans la suite $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$. Si n devient infini, on voit que la *moyenne isotropique par rapport au cercle* est égale à $f(\zeta)$.

D'où cette propriété (qui est valable aussi pour les fonctions harmoniques) d'une fonction monogène : *Sa valeur au centre d'un cercle est la moyenne de ses valeurs sur le cercle.*

On en conclut de suite que *le module d'une fonction ne peut être maximum en un point du domaine d'existence.*

En effet, si la fonction est constante sur le cercle, elle l'est à son intérieur et y a la même valeur que sur le cercle. Si elle n'est pas constante sur le cercle, elle n'y a pas en tout point même module et même argument; donc la valeur moyenne sur ce cercle est certainement inférieure en module à la plus grande valeur du module de la fonction sur le cercle. C'est dire que la valeur au centre a son module inférieur au maximum du module sur le cercle. Or, si en un point a du domaine d'existence (W) le module de $f(z)$ était maximum, il serait supérieur au module de $f(z)$ sur un cercle de centre a, de rayon assez petit, intérieur à W, et ceci est absurde.

Par suite, une fonction monogène sans singularités, dans un domaine fermé, a un maximum pour son module, maximum *qui est atteint sur le contour du domaine.*



CHAPITRE II.

APPLICATION DE L'INTÉGRALE DE CAUCHY AU DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE POLYNOMES D'UNE FONCTION DÉFINIE DANS UN DOMAINE DE WEIERSTRASS.

Dans un Mémoire publié au Tome VI des *Acta mathematica*, M. Runge se propose de trouver pour une fonction monogène, dans un domaine W, une expression valable dans tout ce domaine. Sa méthode consiste à transformer l'intégrale de Cauchy en une série de fractions rationnelles, puis à modifier cette série de diverses façons, en particulier à la transformer en une série de polynomes, quand le domaine W est limite de domaines D_n limités chacun par un seul contour, c'est-à-dire quand ce domaine W est simplement connexe.

Limitons-nous à ce dernier cas et supposons aussi que le domaine W soit borné, c'est-à-dire que le point à l'infini du plan de la variable complexe n'appartient ni à W ni à sa frontière.

On peut distinguer trois stades dans la méthode de M. Runge :

1° On a vu au Chapitre I que tout domaine W est limite de domaines D_n constitués par l'aire (d'un seul tenant) intérieure à un nombre fini de cercles, c'est-à-dire que tout point ζ intérieur à W finit, pour n assez grand, par être intérieur à tous les D_n. On désignera dans la suite le contour de D_n par C_n.

Nous connaissons une expression de la fonction monogène valable en tout point ζ intérieur à D_n ; c'est l'intégrale de Cauchy :

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{C_n} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

La formule précédente n'est pas valable si ζ est sur C_n. Pour éviter que ζ puisse atteindre C_n, nous envisagerons le contour C'_n parallèle à C_n, vers l'intérieur de C_n, à une distance η_n assez petite pour que C'_n soit un contour simple, ne se coupant pas, délimitant une aire simplement connexe. Ceci est possible puisque C_n est

formé d'un nombre fini d'arcs de cercle; D'_n désignera l'aire intérieure à C'_n. Nous ne prendrons l'expression précédente de $f(\zeta)$ que pour ζ INTÉRIEUR A D'_n. Si nous choisissons η_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, par exemple $\eta_n \leqq \frac{1}{n}$, D_n tendant vers W, il en sera de même de D'_n : tout point a intérieur à (W) sera intérieur à D'_n pour n assez grand; en effet, de a comme centre, on peut décrire un cercle intérieur à (W). Si nous choisissons n assez grand pour que tous les points de ce cercle soient intérieurs à D_n, et que l'on ait aussi η_n inférieur au rayon de ce cercle (ce qui évidemment est possible), a sera intérieur à D'_n.

2° On peut alors avec M. Runge trouver une expression $P_n(\zeta)$ qui diffère aussi peu qu'on le veut de l'intégrale de Cauchy quand ζ est intérieur à D'_n, c'est-à-dire telle que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} - P_n(\zeta)\right| < \varepsilon_n,$$

quel que soit ε_n positif pour ζ intérieur à D'_n. C'est le deuxième stade. Et il est visible alors que, si l'on choisit une suite de nombres ε_n tendant vers zéro avec P_n, on aura

$$\lim_{n=\infty} P_n(\zeta) = f(\zeta),$$

quel que soit ζ intérieur au domaine W.

En effet, un point quelconque ζ intérieur à W est intérieur à tous les D'_n pour $n \geqq N$, N étant assez grand. L'inégalité précédente montre bien alors que $P_n(\zeta)$ tend vers $f(\zeta)$ si n tend vers l'infini.

3° P_n pouvant se présenter sous forme d'une série convergente, il pourra être avantageux de remplacer chaque terme de la série par un terme qui en diffère assez peu, c'est-à-dire de remplacer $P_n(\zeta)$ par $\varphi_n(\zeta)$ de façon que

$$|P_n(\zeta) - \varphi_n(\zeta)| < \varepsilon_{n,i};$$

$\varepsilon_{n,i}$ est un nombre positif arbitraire, i caractérise la façon dont on a remplacé dans P_n chaque terme par un terme voisin (par exemple, si l'on développait chaque terme de P_n en série, i pourrait correspondre à la somme d'un nombre fini de termes de la série qu'on substitue au terme considéré de P_n).

Nous disposerons des $\varepsilon_{n,i}$ de façon que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n,i} < \varepsilon_n,$$

moyennant quoi $\varphi_n(\zeta)$ aura encore $f(\zeta)$ pour limite, quel que soit ζ dans (W).

Ces préliminaires posés, abordons le détail des calculs, soit

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

On sait que par définition

$$f(\zeta) = \lim \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{i=q} \frac{f(z_i)}{z_i - \zeta}(z_{i+1} - z_i),$$

$z_1, z_2, \ldots, z_q$ étant des points de C_n, quand q devient infini, de façon que tous les $|z_{i+1} - z_i|$ tendent vers zéro.

Calculons une limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant dans le passage à l'infini, à un certain mode de division, et montrons que ζ étant intérieur à D'_n, on peut choisir q assez grand et les $|z_{i+1} - z_i|$ assez petits pour que

$$\sum_{i=1}^{i=q} \frac{f(z_i)}{z_i - \zeta}(z_{i+1} - z_i)$$

diffère de $f(\zeta)$ de moins de ε_n.

Pour une fonction réelle $\varphi(x)$, c'est un fait bien facile à démontrer.

Envisageons

$$S = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim_{q=\infty} \sum_{i=1}^{i=q} \varphi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (x_i \leqq \xi_i < x_{i+1})$$
$$= \lim_{q=\infty} S_q.$$

Si m_i et M_i désignent le minimum et le maximum de $\varphi(x)$ dans (x_i, x_{i+1}) (nous supposons φ bornée), on a

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{i=q} (x_{i+1} - x_i)\,m_i}_{\sigma_q} \leqq S_q \leqq \underbrace{\sum (x_{i+1} - x_i)\,M_i}_{\Sigma_q}.$$

Or on a aussi

$$\sigma_q \leqq S \leqq \Sigma_q.$$

Donc

$$|S - S_q| \leqq \Sigma_q - \sigma_q = \sum_{i=1}^{q} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Supposons φ continue, alors on peut choisir q assez grand $\left(\text{chacun des intervalles } x_{i+1} - x_i \text{ étant pris égal à } \dfrac{b-a}{q}\right)$ pour que dans chacun de ces intervalles l'oscillation $M_i - m_i$ soit aussi petite qu'on le veut, et comme

$$|S - S_q| < (b-a)\,\text{Max.}(M_i - m_i),$$

ce dernier symbole désignant la plus grande valeur de l'oscillation dans les intervalles considérés, on voit bien que q peut être pris assez grand et les points de division x_i tels que $|S - S_q|$ soit arbitrairement petit. Ceci était utile à rappeler, car la fonction qui figure dans l'intégrale de Cauchy dépend du point ζ variable dans D'_n.

Posons

$$f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y),$$
$$z - \zeta = x + iy - \xi - i\eta.$$

Alors

$$\frac{f(z)}{z - \zeta} = \frac{[P(x, y) + i\,Q(x, y)][x - \xi - i(y - \eta)]}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

ζ étant intérieur à D'_n, le dénominateur de cette fonction est supérieur à η_n^2. La partie réelle et la partie imaginaire du numérateur sont des fonctions continues sur C_n et comme ζ, intérieur à D'_n, ne peut atteindre C_n, il est visible qu'on pourra choisir sur C_n des points de division z_i assez rapprochés pour que l'oscillation de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\dfrac{f(z)}{z-\zeta}$, dans chacune de ces parties, soit, *quel que soit* ζ *dans* D'_n, inférieure à tout nombre donné; c'est dire que les points de division peuvent être pris tels qu'en posant

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{i=q} \frac{f(z_i)}{z_i - \zeta}(z_{i+1} - z_i),$$

on ait, quel que soit ζ dans D'_n,

$$|f(\zeta) - P_n(\zeta)| < \varepsilon_n,$$

quel que soit ε_n donné à l'avance. L'indice q dépend de ε_n et les z_i sont dans une certaine mesure arbitraires, l'essentiel est qu'ils soient assez rapprochés.

On voit, en somme, que $P_n(\zeta)$ peut s'écrire

$$P_n(\zeta) = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{A_{n,i}}{\zeta - a_{n,i}},$$

les $a_{n,i}$ étant des points du contour C_n, $A_{n,i}$ des nombres indépendants de ζ.

$P_n(\zeta)$ est une somme de fractions simples; on peut en faire une fraction rationnelle; si l'on fait tendre n vers l'infini, on voit que

$$f(\zeta) = \lim_{n=\infty} P_n(\zeta) = P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_n - P_{n-1}),$$

$f(\zeta)$ se présente comme *somme d'une série dont le terme général* $(P_n - P_{n-1})$ *est une fraction rationnelle*. Chaque terme $(P_n - P_{n-1})$ a des pôles simples situés sur C_n et C_{n-1}, c'est-à-dire *intérieurs à* (W). Ces pôles ne sont qu'*apparents dans* $f(\zeta)$, car on peut faire commencer la série qui représente $f(\zeta)$ à tel indice n que l'on veut, pour que tel de ces pôles qu'on voudra ne se présente plus. Mais ces pôles n'en sont pas moins gênants; et c'est pour cela qu'avec la troisième partie de la méthode nous transformerons $P_n(\zeta)$, de sorte que ces pôles artificiels disparaissent, ou tout au moins deviennent extérieurs au domaine d'existence de $f(z)$; nous allons remplacer les fractions rationnelles de $P_n(\zeta)$ par des expressions régulières dans (W) qui en diffèrent assez peu. $P_n(\zeta)$ a ses pôles sur C_n, contour de D_n; ce sont les points de division adoptés dans la substitution à l'intégrale de Cauchy d'une somme finie. On a vu que ces points sont arbitraires dans une certaine mesure, pourvu qu'ils soient assez rapprochés. Le contour C_n étant formé d'un nombre fini d'arcs de cercle, nous pouvons supposer que les pôles de P_n ne coïncident avec aucun des points d'intersection de deux arcs consécutifs, points qu'on peut appeler des sommets de C_n. Considérons alors un de ces

pôles a. On peut tracer un cercle tangent en a à C_n, tout entier extérieur à D_n; soit b le centre de ce cercle. Nous allons remplacer la fraction rationnelle $\frac{1}{\zeta - a}$ par une fraction rationnelle admettant b pour pôle et qui, lorsque ζ est dans D'_n, diffère aussi peu qu'on voudra de $\frac{1}{\zeta - a}$.

Il suffit pour cela de développer

$$\frac{1}{\zeta - a} = \frac{1}{\zeta - b - (a - b)},$$

si ζ est dans D'_n, on a

$$|a - b| < |\zeta - b|.$$

Par suite,

$$\frac{1}{\zeta - a} = \frac{1}{\zeta - b} + \frac{a - b}{(\zeta - b)^2} + \ldots + \frac{(a - b)^p}{(\zeta - b)^{p+1}} + \ldots,$$

ζ étant intérieur à D'_n; si l'on remplace $\frac{1}{\zeta - a}$ par les p premiers termes de son développement, l'erreur commise est

$$\frac{(a - b)^p}{(\zeta - b)^p(\zeta - a)}$$

et comme

$$\left|\frac{a - b}{\zeta - b}\right| < 1 \quad \text{et} \quad |\zeta - a| > r_n \text{ (r_n est la distance des contours C_n et C'_n)},$$

on voit que p peut être pris assez grand pour que l'erreur soit aussi petite qu'on voudra. Il en serait de même si l'on développait $\frac{1}{(\zeta - a)^k}$ par rapport aux puissances de $\frac{1}{\zeta - b}$; il n'y aurait pour s'en assurer qu'à dériver k fois par rapport à ζ le développement de $\frac{1}{\zeta - a}$; en se limitant à un nombre p assez grand de termes dans ce développement, on peut réduire l'erreur à être aussi petite qu'on veut. Cette remarque intervient surtout pour la suite, car dans P_n les pôles sont *simples*.

En continuant le processus indiqué pour a et b, on peut évidemment trouver une chaîne de cercles en nombre fini, de centres $c, d, \ldots, l$, chacun d'eux passant par le centre du précédent

(c passant par b), tous ces cercles étant extérieurs à D_n, l étant extérieur au domaine (W) [1].

On peut faire de même pour chacun des pôles de P_n sur C_n, faire partir de chacun d'eux une chaîne formée de cercles ayant les mêmes propriétés que la chaîne $abc\ldots l$. Enfin, on peut supposer que toutes ces chaînes, en nombre fini, se terminent au même point l, c'est-à-dire que le dernier cercle de toutes ces chaînes a pour centre l.

De même qu'on a remplacé $\frac{1}{\zeta - a}$ par une somme de p termes de la forme $\frac{B}{(\zeta - b)^k}$, l'erreur commise, lorsque ζ reste dans D'_n, étant arbitrairement petite, on pourra, en vertu d'une remarque déjà faite, remplacer chaque terme $\frac{1}{(\zeta - b)^k}$ par une somme de q termes de la forme $\frac{C}{(\zeta - c)^k}$, l'erreur commise étant arbitrairement petite. Continuant ainsi jusqu'à l, le nombre de fois qu'on applique ce processus étant fini, il est visible qu'on pourra remplacer $\frac{1}{\zeta - a}$ par une somme de p' termes de la forme $\frac{L}{(\zeta - l)^k}$, l'erreur étant arbitrairement petite. Et comme le nombre des points a pôles de P_n situés sur C_n est fini, on voit en définitive qu'on pourra remplacer $P_n(\zeta)$ par une somme

$$\sum_{1}^{q} \frac{L_k}{(\zeta - l)^k}$$

telle que ζ restant intérieur à D'_n, on ait

$$\left| P_n(\zeta) - \sum_{i=1}^{i=q} \frac{L_k}{(\zeta - l)^k} \right| < \varepsilon_n$$

quelque petit que soit ε_n.

---

[1] Il suffit pour s'en assurer de joindre bl par une ligne de forme simple extérieure à D_n. La plus courte distance d'un point de cette ligne à C_n ayant un minimum δ, on pourra prendre tous les cercles c, d, ... de rayon constant $< \delta$, les centres c, d, ... étant sur la ligne précédente.

Posons

$$Q_n(\zeta) = \sum_1^q \frac{L_k}{(\zeta - l)^k}.$$

Le point l est un point extérieur au domaine W, et d'ailleurs quelconque.

Imaginons que l'on ait pris une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ de nombres positifs tendant vers zéro et que pour chaque indice n on ait déterminé Q_n tel que ζ étant dans D'_n, on ait

$$| P_n(\zeta) - Q_n(\zeta) | < \varepsilon_n.$$

On aura

$$\lim_{n=\infty} Q_n(\zeta) = f(\zeta)$$

quel que soit ζ intérieur à W. $Q_n(\zeta)$ est une fraction rationnelle *de seul pôle* l extérieur à W. $f(\zeta)$ se présente comme somme de la série

$$Q_1(\zeta) + [Q_2(\zeta) - Q_1(\zeta)] + \ldots$$

dont tous les termes sont des fractions rationnelles de pôle l, et régulières dans (W). Il n'y a plus qu'un pas à faire pour passer à la série de polynomes.

En effet on a, en supposant que l est extérieur à un cercle de centre O contenant (W) à son intérieur [ce qui est possible puisque (W) est supposé borné],

$$\frac{1}{\zeta - l} = -\left[\frac{1}{l} + \frac{\zeta}{l^2} + \frac{\zeta^2}{l^3} + \ldots + \frac{\zeta_k}{l^{k+1}} + \ldots\right].$$

De même on peut développer $\frac{1}{(\zeta - l)^m}$ en puissance de ζ, quel que soit m. Et l'on peut, dans ces développements, se limiter à la somme de p premiers termes, p étant assez grand pour que l'erreur commise de ce chef soit, quand ζ reste dans D'_n, aussi petite qu'on voudra. On remplacera ainsi $Q_n(\zeta)$ par un POLYNOME $R_n(z)$ qui en diffère très peu :

$$| Q_n(\zeta) - R_n(\zeta) | < \varepsilon_n,$$

quand ζ est dans D'_n $\left(\varepsilon_n\right.$ arbitrairement petit et en particulier tendant vers zéro avec $\left.\frac{1}{n}\right)$. Le raisonnement plusieurs fois employé prouve que

$$\lim_{n=\infty} R_n(\zeta) = f(\zeta)$$

quel que soit ζ dans (W) puisqu'un point ζ de (W) finit par être intérieur à D'_n pour n assez grand.

Et puisque, quel que soit ζ dans D'_n, on a

$$|f(\zeta) - R_n(\zeta)| < \varepsilon$$

quand n est assez grand (quelque petit que soit ε donné à l'avance), ainsi qu'il résulte des raisonnements faits précédemment, puisque aussi tout domaine intérieur à (W) est intérieur à D'_n pour n assez grand : on voit que *la série de polynomes*

$$R_1(\zeta) + [R_2(\zeta) - R_1(\zeta)] + \ldots + [R_n(\zeta) - R_{n-1}(\zeta)] + \ldots$$

converge uniformément vers $f(\zeta)$ dans tout domaine intérieur à (W).

Je dis en outre que, par un groupement convenable de termes consécutifs, qui conserve le caractère de série de polynomes, *on peut rendre la série absolument convergente dans tout domaine intérieur à* (W).

En effet, soit la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont les termes sont des fonctions de plusieurs variables. On la suppose uniformément convergente quand ces variables décrivent un certain domaine ; c'est dire que, ε étant donné à l'avance, on peut déterminer un nombre N_ε (¹) tel que

$$p > N_\varepsilon, \qquad q > N_\varepsilon$$

entraînent

$$|S_p - S_q| < \varepsilon,$$

quelles que soient les valeurs de variables dans le domaine d'uniforme convergence (S_p est le nombre de p premiers termes).

Choisissons alors une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ tels que la série $\Sigma\varepsilon_k$ converge et déterminons les nombres

$$N_{\varepsilon_1} = n_1, \quad N_{\varepsilon_2} = n_3, \quad \ldots, \quad N_{\varepsilon_k} = n_k, \quad \ldots$$

qui leur correspondent par la loi précédente, et qu'on peut évi-

---

(¹) Tout nombre $n > N_\varepsilon$ jouit de la même propriété que N_ε. Cette remarque sera utilisée plus loin.

demment supposer croissants; ceci fait, posons

$$v_k = u_{n_{k-1}} + u_{n_{k-1}+1} + \dots + u_{n_k - 1}.$$

La série proposée est égale à la série Σv_k, qui converge uniformément; mais

$$v_k = S_{n_k} - S_{n_{k-1}},$$

donc

$$|v_k| < \varepsilon_{k-1}.$$

Par suite, la série $\Sigma |v_k|$ dont les termes sont inférieurs à ceux de la série $\Sigma \varepsilon_k$ est convergente. C'est dire que la série initiale a été transformée en une série uniformément et absolument convergente Σv_k.

La méthode de M. Runge permet donc de représenter par une série de polynomes uniformément et absolument convergente, toute fonction définie dans un domaine (W) borné quelconque. Elle permet, bien entendu, si l'on a une fonction définie dans un certain domaine D, de la représenter dans tout domaine (W) intérieur à D, car rien dans notre exposition ne suppose essentiellement que (W) est le *domaine d'existence* d'une fonction analytique.

Cette possibilité de représenter toute fonction définie dans un domaine (W) conduit à des conséquences intéressantes que nous allons signaler.

Domaines qui ne sont pas d'un seul tenant. — Considérons deux domaines D et D_1 limités par deux courbes simples C, C_1, et sans points communs. L'intérieur de chacun de ces domaines (frontières C et C_1 exclues) constitue un domaine W et l'ensemble de ces deux domaines constitue un domaine qui n'est pas d'un seul tenant. Considérons deux fonctions monogènes $f(z)$ et $f_1(z)$ définis respectivement dans chacun de ces domaines, et d'ailleurs quelconques. Pour chaque domaine D, D_1 on peut considérer les contours C_n et $C_{n,1}$ comme précédemment. Envisageant la fonction

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_n} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} + \int_{C_{n,1}} \frac{f_1(z)\,dz}{z-\zeta}\right],$$

on voit que si ζ est dans D_n, elle est égale à $f(\zeta)$, et si ζ est dans $D_{n,1}$ elle est égale à $f_1(\zeta)$. Sur cette somme on peut faire tous les raisonnements que nous avons faits au paragraphe précé-

dent pour une seule intégrale et l'on arrive à cette conclusion qu'il existe une série de polynomes $\Sigma P_n(\zeta)$ qui converge absolument et uniformément dans tout domaine intérieur à D ou à D_1, et dont la somme est $f(\zeta)$ si ζ est dans D, $f_1(\zeta)$ si ζ est dans D_1.

Ce qui précède suppose que D et D_1 n'empiètent par l'un sur l'autre, mais leurs frontières pourraient fort bien avoir des points et même des arcs communs, puisque les domaines D_n et $D_{n,1}$ sont intérieurs à D et D_1. La série de polynomes converge vers $f(\zeta)$ dans D, vers $f_1(\zeta)$ dans D_1. Sur les frontières de D et D_1, il peut se présenter des singularités dans le détail desquels nous n'entrerons pas.

Il est clair que cette méthode s'applique à un nombre fini quelconque de domaines $D_1, D_2, \ldots, D_k$ tous extérieurs deux à deux; si dans ces domaines on définit des fonctions monogènes $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta), \ldots, f_k(\zeta)$, on peut trouver une série de polynomes qui converge vers $f_i(\zeta)$ dans le domaine D_i ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Il n'est pas difficile ensuite de passer au cas d'un domaine non borné et à une infinité dénombrable de domaines.

Domaine non borné. — Soit un domaine Δ non borné, mais weierstrassien, d'un seul tenant et limité par une courbe simple.

Traçons un cercle Γ_n de centre O dont le rayon tende vers l'infini avec n; il a, avec le domaine Δ, des parties communes Δ_n qui peuvent ne pas être d'un seul tenant (toutefois, pour n assez grand, Δ_n est toujours d'un seul tenant, mais ceci importe peu). On peut trouver une série de polynomes qui, quand ζ est intérieur à Δ_n, converge vers la fonction $f(\zeta)$ définie dans Δ; considérons un domaine Δ'_n intérieur à Δ_n et qui tende vers Δ avec Δ_n; on pourra choisir dans la série de polynomes qui, on le sait, converge uniformément vers $f(\zeta)$ quand ζ est dans Δ'_n un nombre de termes assez grand pour que leur somme diffère de $f(\zeta)$ de moins de ε_n en valeur absolue quand ζ est dans Δ'_n. Cette somme partielle est un polynome $P_n(\zeta)$. Faisons tendre n vers l'infini; Δ_n et Δ'_n tendent vers Δ, et si l'on a choisi ε_n tendant vers zéro, la série de polynomes

$$P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n - P_{n-1})$$

converge uniformément vers $f(\zeta)$, quel que soit ζ dans un domaine borné intérieur à Δ.

Infinité dénombrable de domaines à distance finie. — De même, supposons qu'on ait à distance finie une infinité dénombrable de domaines $D_1, D_2, \ldots$ sans points communs deux à deux. On peut, étant données des fonctions $f_1(\zeta), f_2(\zeta), \ldots, f_k(\zeta), \ldots$ définies dans ces domaines respectifs, trouver une série de polynomes qui converge vers $f_i(\zeta)$ dans D_i et uniformément dans tout domaine D'_i intérieur à D_i, pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

On peut, ε_n étant donné, prendre la somme P_n d'un nombre de termes assez grand de cette série de façon que

$$|P_n(\zeta) - f_i(\zeta)| < \varepsilon_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

quand ζ est dans $D'_{i,n}$; P_n est un polynome. Choisissons ε_n tendant vers zéro, les $D'_{i,n}$ tendant vers les D_i quand n tend vers l'infini; un raisonnement simple montre que la série de polynomes

$$P_1(\zeta) + [P_2(\zeta) - P_1(\zeta)] + \ldots + [P_n(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)] + \ldots$$

converge vers $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ quand ζ est respectivement dans $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$, car si ζ est dans D_k on a, pour $n > k$, si n est assez grand pour que $D'_{k,n}$ contienne ζ,

$$|P_n - f_k(\zeta)| < \varepsilon_n.$$

Autres applications. — Soit un domaine (W) d'un seul tenant, simplement connexe à l'intérieur duquel sont définies des fonctions analytiques $f_1(\zeta), f_2(\zeta), \ldots, f_n(\zeta), \ldots$. Supposons que, à l'intérieur d'un domaine D limité par C intérieur à (W), la série

$$f_1(\zeta) + \ldots + f_n(\zeta) + \ldots$$

soit uniformément convergente. Considérons une série de contours C_n sans points multiples tendant vers C quand n tend vers l'infini. ε_n étant arbitrairement petit, on peut déterminer l'indice p_n tel que

$$|S_{p_n}(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon_n$$

quand ζ est dans C_n, $f(\zeta)$ étant la somme

$$f_1(\zeta) + f_2(\zeta) + \ldots + f_n(\zeta) + \ldots$$

et

$$S_{p_n} = f_1 + \ldots + f_{p_n}.$$

Choisissons une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ de nombres positifs tendant vers zéro. Pour chaque expression $S_{p_n}(\zeta)$ on peut déterminer, ainsi qu'il résulte des théories précédentes, un polynome $P_n(\zeta)$ tel que, ζ étant quelconque dans C_n, on ait

$$P_n(\zeta) - S_{p_n}(\zeta) \,| < \varepsilon_n.$$

On aura alors dans C_n

$$| P_n(\zeta) - f(\zeta) | < 2\varepsilon_n,$$

et par suite la série de polynomes

$$P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n - P_{n-1})$$

converge vers $f(\zeta)$ dans tout D.

La série de fonctions analytiques a été remplacée par une série de polynomes uniformément convergente dans tout domaine intérieur à D.

Nous démontrerons encore le théorème suivant dû à Weierstrass :

Si une série de fonctions monogènes uniformes dans un domaine D *converge uniformément sur le contour simple* C *limitant ce domaine* D, *elle converge uniformément dans le domaine fermé* D *et la somme de cette série est une fonction monogène uniforme dans le domaine ouvert* D (C exclu).

L'hypothèse est que, quel que soit z sur C, et ε donné à l'avance, on peut déterminer N tel que, pour $p > N$, $q > N$, on ait

$$| S_k(z) - S_q(z) | < \varepsilon,$$

S_p étant la somme des p premiers termes de la série envisagée. $S_p - S_q$ est une fonction holomorphe dans D, et atteint par suite le maximum de son module en un point de C. C'est dire que si ζ est quelconque dans le domaine fermé D, on aura

$$| S_p(\zeta) - S_q(\zeta) | < \varepsilon.$$

Ceci exprime que la série envisagée converge uniformément dans le domaine fermé D, vers une fonction $f(\zeta)$. De plus, soit D_1 un domaine complètement intérieur à D, limité par la courbe C_1.

On pourra trouver, entre C_1 et C, une courbe Γ comprenant C_1 à son intérieur, et dont la plus courte distance à C_1 soit un nombre positif non nul δ.

Si x est dans D_1, on a

$$S_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{S_n(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

Soit $\varphi(\zeta)$ la fonction holomorphe dans D_1 définie par

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta},$$

on a

$$\varphi(\zeta) - S_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)-S_n(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

Si n est supérieur à une certaine valeur p, on a, quels que soient z sur Γ et ζ dans D_1,

$$|f(z)-S_n(z)| < \varepsilon,$$
$$|z-\zeta| \geqq \delta.$$

Donc

$$|\varphi(\zeta) - S_n(\zeta)| < \frac{L\varepsilon}{2\pi\delta},$$

L désignant la longueur du contour Γ. Comme ε est arbitrairement petit, S_n tend uniformément vers $\varphi(\zeta)$ dans D_1; c'est dire que

$$f(\zeta) = \varphi(\zeta)$$

est holomorphe dans D_1.

On montre de la même façon que la série des dérivées d'ordre k des termes de la série proposée converge uniformément dans tout domaine intérieur à D et a pour somme $f^{(k)}(\zeta)$.

De ce théorème de Weierstrass, il résulte qu'une série de fonctions holomorphes dans un domaine D ne peut converger uniformément que dans un domaine simplement connexe, contenu dans D, puisque la convergence uniforme sur un contour fermé entraîne la convergence uniforme dans ce contour.

Une série de polynomes convergeant uniformément dans D ne pourra donc servir à représenter une fonction ayant des points sin-

guliers dans D. Autrement dit, si l'on considère une fonction $f(z)$ monogène uniforme dans l'anneau compris entre les courbes C_1 et C_2 simples ayant des points singuliers à l'intérieur de la courbe C_1, il ne peut exister de série de polynomes convergeant uniformément dans tout anneau intérieur à l'anneau précédent (c'est-à-dire compris entre deux courbes Γ_1, Γ_2 dont l'une, Γ_1, englobe C_1, et l'autre, Γ_2, englobant Γ_1, est englobée dans C_2). La restriction d'être simplement connexe imposée *a priori* au domaine W, dans lequel nous avons développé la fonction homogène en série de polynomes, n'est donc pas une restriction factice, elle tient à la nature même de la convergence des séries de polynomes.

APPLICATIONS A QUELQUES DÉVELOPPEMENTS PARTICULIERS.

Reprenons la formule de Cauchy :

$$(1) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta},$$

C étant un contour simple comprenant l'origine intérieure à la région où $f(z)$ est monogène.

L'analyse du processus employé pour déduire de la formule précédente le développement en série de Taylor va nous conduire très simplement à des développements en série de polynomes. Remarquons que

$$f(\zeta) = \int_c \frac{\frac{f(z)}{z}}{1-\frac{\zeta}{z}}\,dz.$$

Posant $\frac{\zeta}{z} = u$, on remarque que le développement de $\frac{1}{1-u}$ en série de Taylor est connu :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + \ldots + u^n + \ldots,$$

valable pour $|u| < 1$.

Le développement

$$(2) \qquad \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = 1 + \frac{\zeta}{z} + \ldots + \frac{\zeta^n}{z^n} + \ldots$$

sera valable pour $\left|\frac{\zeta}{z}\right| < 1$, c'est-à-dire quand ζ sera intérieur au cercle Γ_z ayant son centre à l'origine et passant par le point z [1]. Pour chaque point z du contour C, le développement (2) convergera quand ζ sera intérieur à Γ_z. Il y a un des cercles Γ_z qui est plus petit que tous les autres. Lorsque ζ lui est intérieur, le développement (2) converge quel que soit z sur C, et converge même uniformément; on peut alors écrire

$$(3)\quad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n,$$

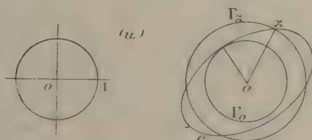
en posant

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

(c_n ne dépend pas de C tant que C reste dans la région où $f(z)$ est holomorphe).

Appelons Γ_0 le plus petit des cercles Γ_z. Son rayon est la borne inférieure des distances de zéro à tous les points de C (borne

Fig. 1.



atteinte, car C est continue). Lorsque ζ est intérieure à Γ_0, on est sûr que le développement (3) converge, mais rien dans la démonstration précédente ne nous permet d'affirmer que (3) diverge si ζ est extérieur à Γ_0. Et, en fait, on sait très bien que (3) converge dans *le plus grand cercle de centre* O *où* $f(\zeta)$ *est holomorphe*.

Cette démonstration de l'existence d'une série de puissances

---

(1) Nous supposons ici l'origine intérieure à C, et nous développons par rapport aux puissances de ζ; le même développement peut être fait par rapport aux puissances de $\zeta - a$, a étant un point quelconque intérieur à C. Ce n'est pas restreindre la généralité que de prendre $a = 0$.

égale à $f(\zeta)$ n'est pas la plus simple, mais elle s'étend sans difficulté à d'autres développements de $f(\zeta)$.

Il est facile, par exemple, de développer $\frac{1}{1-u}$ en série de polynomes

$$\frac{1}{1-u} = \frac{1}{2-(1+u)} = \frac{1}{2} + \frac{1+u}{2^2} + \ldots + \frac{(1+u)^n}{2^{n+1}} + \ldots,$$

développement qui converge dans le cercle de centre -1 en passant par le point $+1$. On peut l'écrire

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) \qquad \text{avec} \qquad P_n = \frac{(1+u)^n}{2^{n+1}},$$

P_n est un polynome.

De même

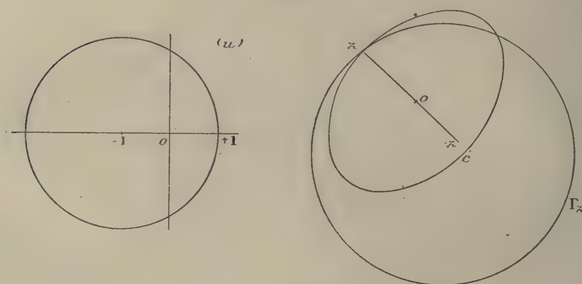
$$(4) \qquad \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{\zeta}{z}\right)$$

converge dans un domaine ζ qui se déduit du cercle précédent par la transformation

$$\zeta = uz.$$

C'est un cercle Γ_z passant par le point z et ayant son centre au point $-z$. Faisons décrire à z le contour C et envisageons la

Fig. 2.



région Γ_0 intérieure à tous ces cercles Γ_z. Lorsque ζ sera intérieur à cette région Γ_0 le développement (4) converge uniformément,

quel que soit z, sur le contour C. On peut alors écrire

$$f(z) = \int_c \frac{f(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n\left(\frac{\zeta}{z}\right) dz,$$

et, à cause de la convergence uniforme,

$$(5) \qquad f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z} \mathrm{P}_n\left(\frac{\zeta}{z}\right) dz.$$

Évaluons chacun de ces termes; on a

$$\mathrm{P}_n(u) = \gamma_{0n} + \gamma_{1n} u + \ldots + \gamma_{nn} u^n,$$

puisque P_n est un polynome de degré n dont les coefficients γ_{ij} dépendent de n.

Si donc on pose

$$\pi_n(\zeta) = c_0 \gamma_{0n} + c_1 \gamma_{1n} \zeta + \ldots + c_n \gamma_{nn} \zeta^n,$$

on voit que

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\zeta).$$

Il suffit pour s'en convaincre d'expliciter dans (5)

$$\mathrm{P}_n\left(\frac{\zeta}{z}\right) = \gamma_{0n} + \gamma_{1n} \frac{\zeta}{z} + \ldots + \gamma_{nn} \frac{\zeta^n}{z^n}.$$

Alors le terme général de (5) s'écrit

$$\sum_{p=0}^{p=n} \gamma_{pn} \zeta^p \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{p+1}} dz = \sum_{p=0}^{p=n} c_p \gamma_{pn} \zeta^p,$$

en posant conformément au développement (3)

$$c_p = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Ce qui précède nous montre que la connaissance d'un développement en série de polynomes de la fonction particulière $\frac{1}{1-u}$ permet de calculer le développement correspondant de toute fonction holomorphe $f(\zeta)$, à l'aide seulement des coefficients c_i de la série de Taylor qui correspond à $f(\zeta)$. Ce développement con-

verge certainement dans une région que nous avons appris plus haut à constituer, pour le cas où

$$P_n(u) = \frac{(1+u)^n}{2^{n+1}}.$$

Il est visible que cette région est au moins aussi étendue que celle à laquelle nous avons été conduits dans notre exposition de la série de Taylor.

Si l'on analyse le procédé précédent, il est clair que la forme particulière adoptée pour $P_n(u)$ n'a joué aucun rôle dans le développement, et que le rôle essentiel est dans la propriété de $P_n(u)$ d'être *linéaire* par rapport aux puissances de u [1]. C'est à ce fait que l'on doit d'avoir pu constituer $\Pi_n(\zeta)$ très simplement à l'aide des coefficients de P_n et des coefficients de la série de Taylor. Résumons la règle.

Si

$$f(\zeta) = \sum_{p=0}^{p=\infty} c_p \zeta^p$$

est le développement de Taylor, on obtient le coefficient de ζ^p dans $\Pi_n(\zeta)$ en multipliant par c_p le coefficient de ζ^p dans $P_n(\zeta)$.

Les séries de polynomes constituent une représentation très générale des fonctions monogènes. Elles ont des propriétés d'une extrême généralité; si l'on ne les astreint pas à converger uniformément, elles peuvent servir à représenter des fonctions très variées et très compliquées. A cause même de leur extrême généralité, on peut penser, si l'on veut étudier plus en détail ces séries, qu'il est bon de se borner à des catégories de séries de polynomes, jouissant de propriétés communes plus particulières, il est vrai, mais plus précises et, par cela même, au moins aussi intéressantes que les séries tout à fait générales.

A ce point de vue, la notion de *classe de séries de polynomes* paraît se présenter naturellement.

On a rencontré il y a déjà bien longtemps des développements en série de polynomes particuliers, par exemple les polynomes de

---

[1] $P_n(u)$ pourrait être une série de puissances de u, sans que rien soit changé à ce que nous disons.

Legendre. Ces polynomes étant $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, le développement se présente sous la forme

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(\zeta).$$

Considérant deux de ces développements

$$\Sigma c_n X_n(\zeta) \quad \text{et} \quad \Sigma c'_n X_n(\zeta),$$

un terme en ζ^p du premier développement et le terme correspondant du deuxième ont des coefficients dont le rapport est $\frac{c_n}{c'_n}$, quel que soit p. On voit que ce rapport dépend du rang du polynome et nullement de la puissance de ζ envisagée.

Au contraire, dans le mode de développement que nous venons d'exposer à deux fonctions $f(\zeta)$, $f'(\zeta)$ dont les développements de Taylor sont

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p \zeta^p, \qquad \sum_{p=0}^{\infty} c'_p \zeta^p$$

correspondent des séries de polynomes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(\zeta) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Pi'_n(\zeta),$$

telles que, si l'on envisage le terme en ζ^p de Π_n et le terme en ζ^p de Π'_n, leur rapport est

$$\frac{c_p}{c'_p},$$

il ne dépend que de la puissance de ζ et nullement du rang du polynome Π_n.

Nous dirons que ces deux séries $\Sigma\Pi_n(\zeta)$ et $\Sigma\Pi'_n(\zeta)$ appartiennent à la même classe.

D'une façon générale, si l'on a deux séries

$$\Sigma P_n(\zeta), \qquad P_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \zeta^k,$$

$$\Sigma Q_n(\zeta), \qquad Q_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} c'_{nk} \zeta^k,$$

ces deux séries seront dites de même classe *si le rapport* $\frac{c_{n,k}}{c'_{n,k}}$ *ne dépend que de* k.

Au contraire, si ce rapport ne dépend que de n et pas de k (comme dans l'exemple cité des polynomes de Legendre), les deux séries seront dites appartenir à la même catégorie.

Les catégories de séries de polynomes ont été étudiées depuis longtemps; leurs domaines de convergence ont des propriétés intéressantes.

Les classes de séries de polynomes ont, elles aussi, des propriétés intéressantes relatives à leurs régions de convergence. C'est à ces propriétés que nous allons passer maintenant. Nous allons les déduire du mode par lequel nous avons introduit les classes, à savoir par les développements de $\frac{1}{1-u}$.

Supposons, d'une manière générale, que l'on puisse poser

$$\frac{1}{1-u} = \lim f_n(u),$$

f_n étant un polynome ou une fonction entière de u [le lecteur familiarisé avec les éléments de l'analyse sait bien que la considération de $\lim f_n(u)$ équivaut à celle de la série $f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n - f_{n-1})$ qui est de l'espèce indiquée : série de polynomes ou de fonctions entières de u], la convergence de f_n vers sa limite étant uniforme dans tout domaine D′ intérieur à un certain domaine D.

Donc posons

$$\varphi_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z} f_n\left(\frac{\zeta}{z}\right) dz.$$

Si l'on construit tous les domaines, se déduisant du domaine D que décrit u, par la transformation

$$\zeta = zu$$

(z prenant toutes les valeurs possibles sur C), domaines qu'on peut appeler zD, si ζ est intérieur à tous ces domaines, $f_n\left(\frac{\zeta}{z}\right)$ converge uniformément vers $\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}}$, quel que soit z sur C lorsque n

grandira indéfiniment et l'on aura

$$f(\zeta) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(\zeta).$$

La convergence sera certainement uniforme dans tout domaine intérieur à tous les zD (lorsque z prend toutes les positions possibles sur C). Si f_n est un polynome (ou une fonction entière), φ_n le sera aussi, et lorsque la fonction f change on obtient une *classe de séries de polynomes* (ou de fonctions entières).

Cette partie commune à tous les zD (région où la convergence de la série est certaine) aura des propriétés qui dépendront du domaine D lui-même. Si l'on suppose en particulier que $f_n(u)$ converge dans tout le demi-plan situé du côté de la perpendiculaire à l'axe réel menée par $u=1$ qui contient l'origine, le domaine zD sera le demi-plan situé du même côté que O par rapport à Δ perpendiculaire à Oz en z, z décrivant C. Δ enveloppe l'antipodaire de C et la région intérieure à cette antipodaire est une région où la convergence de φ_n vers f est certaine.

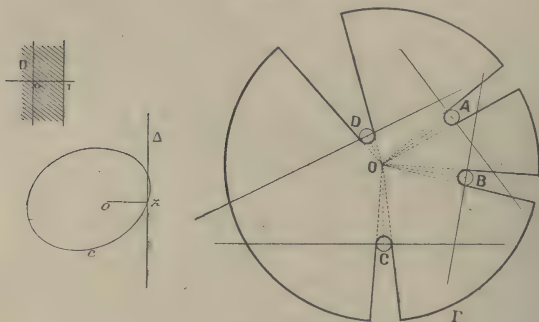
Si, pour particulariser, on suppose que la fonction $f(z)$ n'a qu'un nombre limité de points singuliers, par exemple quatre points A, B, C, D, en décrivant un petit cercle autour de chacun d'eux, lui menant des tangentes par O et coupant toutes ces tangentes par un cercle de rayon très grand de centre D, on a un contour Γ que montre la figure 3, dans lequel f est holomorphe. Si l'on forme l'antipodaire de ce contour, on obtient un contour qui, lorsque les rayons de petits cercles A, B, C, D tendent vers zéro, le rayon du grand cercle étant suffisamment grand, tend vers le polygone formé par les perpendiculaires à OA, OB, OC, OD en A, B, C, D. Tout domaine intérieur à ce polygone sera, lorsque le rayon des cercles A, B, C, D sera assez petit, intérieur à l'antipodaire du contour Γ correspondant à ces cercles, et par suite φ_n convergera vers f, uniformément dans ce domaine.

Ce polygone s'appelle le *polygone de sommabilité;* on peut le définir comme la région d'un seul tenant contenant l'origine et limitée par les perpendiculaires menées en tous les points singuliers à la droite joignant le point à l'origine (si l'on suppose en particulier que les points singuliers forment une courbe fermée, le polygone dégénère en une région limitée par la courbe antipodaire de la courbe singulière par rapport à l'origine).

M. Phragmén a montré que le polygone de sommabilité est une région de convergence, c'est-à-dire que φ_n ne converge plus vers f en tout point extérieur au polygone de sommabilité.

Il est facile de fournir une expression qui tende vers $\frac{1}{1-u}$ dans tout le demi-plan D situé du côté de la parallèle à l'axe imaginaire

Fig. 3.



menée par $u = 1$, qui contient l'origine. On a en effet, d'après

$$\frac{1}{1-u} = \int_0^\infty e^{-a(1-u)}\, da,$$

a étant une variable réelle, mais l'intégrale n'est convergente que si la partie réelle de $1-u$ est positive, c'est-à-dire dans le demi-plan D.

Posons donc

$$f_n(u) = \int_0^n e^{-a} e^{au}\, du.$$

Dans tout domaine D' intérieur au domaine D : $\Re(1-u) > 0$, $f_n(u)$ converge uniformément vers $\frac{1}{1-u}$.

Considérons

$$\varphi_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z} \left(\int_0^n e^{-a} e^{a\frac{\zeta}{z}}\, da \right) dz,$$

ou, en intervertissant les intégrations,

$$\varphi_n(\zeta) = \int_0^n e^{-a}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z} e^{a\frac{\zeta}{z}} dz\right) da.$$

a restant fini dans le crochet précédent, on peut développer $e^{a\frac{\zeta}{z}}$ en série de puissances uniformément convergente dans tout domaine fini du plan ζ, quel que soit z sur C :

$$e^{a\frac{\zeta}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \zeta^n}{z^n n!}.$$

Et en posant, selon l'habitude,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z} e^{a\frac{\zeta}{z}} dz = \varphi(a\zeta)$$

en posant

$$\varphi(a\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(a\zeta)^n.$$

Nous avons supposé $f(z)$ holomorphe dans le contour C comprenant l'origine, donc la série de Taylor $\Sigma c_n z^n$ a un rayon de convergence fini $\neq 0$; on en conclut immédiatement que $\varphi(a\zeta)$ est une fonction entière. On l'appelle *fonction entière associée à* $f(z)$.

Alors

$$\varphi_n(\zeta) = \int_0^n e^{-a}\varphi(a\zeta)\,da.$$

Il résulte des raisonnements généraux faits avant l'introduction de la fonction particulière

$$f_n(u) = \int_0^n e^{-a} a^{au}\,da,$$

que $\varphi_n(\zeta)$ tend uniformément, lorsque n tend vers l'infini, vers $f(\zeta)$ dans tout domaine intérieur au polygone de sommabilité [si les

points singuliers de $f(z)$ sont isolés]: on a la courbe antipodaire de la courbe singulière de $f(z)$ si les points singuliers de $f(z)$ forment une courbe fermée Γ.

C'est-à-dire que l'on a

$$f(\zeta) = \int_0^\infty e^{-a} \varphi(a\zeta)\, da = \lim_{n=\infty} \varphi_n(\zeta) \quad [1].$$

Les séries de polynomes (M). — Lorsqu'on se propose simplement, soit de prolonger hors du cercle de convergence une série de Taylor, soit d'étudier des points singuliers sur ce cercle, les développements précédents se montrent commodes. Mais ils sont insuffisants quand on se propose le problème très intéressant de rechercher des développements en séries de polynomes, valables dans les domaines les plus étendus qu'il soit possible d'avoir.

Dans cet ordre d'idées, la question a été résolue par M. Mittag-Leffler dans une série de Mémoires publiés aux *Acta* (t. XXIII et suiv.). La méthode suivie par M. Mittag-Leffler s'inspire uniquement de l'idée de prolongement analytique selon Weierstrass. Nous nous servirons de l'intégrale de Cauchy.

Nous savons, par des résultats généraux établis au commencement de ce Chapitre, qu'on peut développer en série de polynomes toute fonction monogène dans un domaine (W) borné, et nous avons appris à faire l'extension aux domaines non bornés. La fonction $\frac{1}{1-u}$ n'admet que le point $u=1$ pour point singulier. On ne peut la développer en série de polynomes uniformément convergente dans une aire quelconque du plan dont on retrancherait un petit cercle de centre 1; c'est ce qu'il résulte d'une remarque faite sur la nécessité de supposer les domaines (W) où l'on opère, simplement connexes. Nous aurons toutefois un domaine convenable en coupant le plan par la demi-droite de l'axe réel allant de $u=1$ à $u=+\infty$. Le plan complexe dont on retranche cette demi-droite constitue un domaine (W) simplement connexe. Ce domaine, nous l'appellerons *l'étoile relative à* $\frac{1}{1-u}$ et nous le désignerons par A.

---

[1] Le lecteur désireux d'étudier plus en détail cette représentation de $f(z)$ dans le polygone de sommabilité pourra se reporter aux *Leçons sur les séries divergentes* (Chap. III et IV), publiées dans la même collection.

On sait former des polynomes $f_n(u)$ tels que

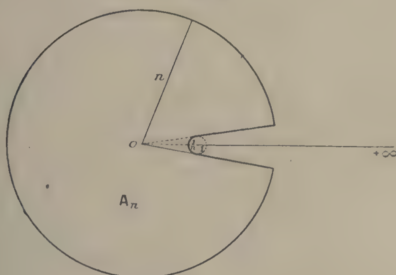
$$\frac{1}{1-u} = \lim_{n=\infty} f_n(u),$$

la convergence étant uniforme dans tout domaine A′ intérieur à A, c'est-à-dire borné et ne coupant pas la demi-droite $(1; +\infty)$.

Il est commode d'introduire des domaines $\mathcal{A}_n$ tendant vers A avec $\frac{1}{n}$, obtenus en traçant un cercle de centre 1, de rayon $\frac{1}{n}$, lui menant de O les tangentes dont on supprime les parties entre O et le point de contact pour ne conserver que le prolongement de ces parties jusqu'à leur rencontre avec un cercle de centre O de rayon n; $\mathcal{A}_n$ sera le domaine limité par les deux segments de tangente, l'arc supérieur à π qu'elles découpent sur le grand cercle, l'arc inférieur à π compris entre leurs points de contact sur le petit cercle. Un tel domaine est représenté par la figure 4.

On sait explicitement former les polynomes $f_n(u)$ satisfaisant

Fig. 4.



aux conditions précédentes; mais il est remarquable que tous les résultats essentiels relatifs aux développements en série qu'on obtient ainsi peuvent être obtenus en supposant seulement l'existence de telles séries, uniformément convergentes dans tout domaine A′ intérieur à A, sans connaître avec précision la forme des polynomes en question.

Définissons au préalable l'étoile relative à une fonction monogène $f(z)$. Nous supposons toujours cette fonction monogène

uniforme (tout ce que nous disons s'appliquerait à une branche uniforme de fonction monogène). Un point (P) du domaine (W) d'existence d'une fonction $f(z)$ sera dit intérieur à l'étoile de $f(z)$ relative à l'origine O si tous les points de OP appartiennent à W (il est clair qu'on pourrait remplacer l'origine par tout autre point a, les polynomes étudiés seraient des polynomes en $\zeta - a$). L'étoile ainsi définie est un *domaine ouvert.* P appartenant à l'étoile, tous les points de OP appartiennent à (W). Donc OP étant un segment fini, on peut trouver une bande comprise entre deux parallèles équidistantes de OP et limitée par deux demi-cercles de centres O et P tangents à ces parallèles, dont tous les points soient intérieurs à (W). Ceci résulte de ce que tout point de OP peut être enfermé dans un petit cercle intérieur à (W) et que tous les cercles relatifs à tous les points de OP ont leurs rayons supérieurs à une valeur fixe. Plus particulièrement, si l'on envisage le cercle de centre P qui est tangent aux deux parallèles limites de la bande, et si de O on lui mène les tangentes, le domaine limité par ces deux tangentes et l'arc du cercle P supérieur à une demi-circonférence est intérieur au domaine (W) (*fig.* 5). On reconnaît de suite que l'on peut toujours prendre le rayon du cercle P assez petit pour que tous les points de ce cercle et aussi tous les points de la frontière du domaine en pointe précédent soient intérieurs à l'étoile.

On peut, avec M. Mittag-Leffler, donner de l'étoile la définition suivante, visiblement équivalente à la précédente.

Sur chaque rayon issu de O, conservons seulement la partie qui va de O au point singulier de f le plus rapproché de O, situé sur ce rayon (s'il n'y en a pas, nous conserverons toute la demi-droite considérée). Le domaine balayé par le segment restant, lorsque l'on fait tourner ce segment de 360° autour de l'origine, est l'étoile relative à O.

Développement de $f(\zeta)$ dans l'étoile. — Soit connu le développement en série de polynomes

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0} \mathrm{H}_k(u),$$

valable dans l'étoile A relative à $\frac{1}{1-u}$.

La formule

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(z)}{z\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_k\left(\frac{\zeta}{z}\right)dz$$

résoudra la question si C est choisi convenablement.

Rappelons d'abord que le développement

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{\infty}\Pi_k(u),$$

valable dans A, uniformément convergent dans tout domaine intérieur à A, en particulier dans $\mathcal{A}_n$ défini précédemment, peut toujours, par un groupement convenable des termes, être supposé absolument convergent dans $\mathcal{A}_n$. On a donc dans $\mathcal{A}_n$

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Pi_k(u)| < M_n.$$

M_n, nombre positif dépendant de n, va grandissant indéfiniment avec n et caractérise en quelque sorte la convergence de la série de polynomes.

Ceci posé, désignons par α_n l'angle tel que $\sin\alpha_n = \frac{1}{n}$; c'est le demi-angle des tangentes issues de O, au cercle de centre 1 de rayon $\frac{1}{n}$ dans $\mathcal{A}_n$.

Choisissons pour contour C_n d'intégration le contour défini comme il suit :

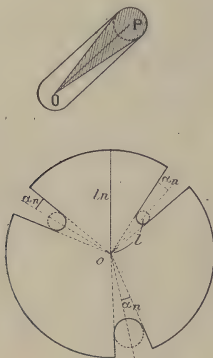
Parmi les points singuliers de $f(z)$ (qui forment un ensemble fermé), il en est un plus voisin de l'origine que les autres, soit l sa distance à l'origine. Traçons le cercle de centre O de rayon ln, puis pour chaque point singulier z de $f(z)$, construisons le domaine $z\mathcal{A}_n$, domaine qui se déduit de $\mathcal{A}_n$, en multipliant les affixes de tous les points intérieurs à $\mathcal{A}_n$ par l'affixe z du point singulier. Prenons la partie commune à tous les $z\mathcal{A}_n$. C_n sera le contour de cette partie commune, C_n est intérieur au cercle de rayon ln et peut compter des arcs de ce cercle. Si par exemple les points singuliers de $f(\zeta)$ sont isolés, C_n se composera d'arcs du cercle ln, d'arcs des cercles de rayon $\frac{z}{n}$ décrits autour de chaque

point singulier z et de segments de rayons du cercle ln tangents aux petits cercles précédents (*fig.* 5). C_n étant ainsi défini, il faut définir le domaine D_n où doit rester ζ pour que, z décrivant C_n, le point $\frac{\zeta}{z} = u$ reste intérieur à $\mathcal{A}_n$ où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k\left(\frac{\zeta}{z}\right)$$

converge uniformément. Pour cela nous construirons, relativement à tout point z de C_n, le domaine $z\mathcal{A}_n$; la partie commune aux

Fig. 5.



domaines relatifs à tous les points de C_n sera le domaine D_n cherché pour ζ.

ζ étant dans ce domaine D_n, $\frac{\zeta}{z}$ est, quel que soit z sur C_n, dans $\mathcal{A}_n$. Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k\left(\frac{\zeta}{z}\right)$$

converge uniformément et absolument dans le domaine précédent et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \Pi_k\left(\frac{\zeta}{z}\right) \right| < M_n.$$

C_n étant intérieur au domaine W, on peut limiter supérieurement le module de $\frac{f(z)}{z}$ sur C_n; on peut dès lors, dans

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(z)}{z} \sum_{k=0}^{\infty} H_k\left(\frac{\zeta}{z}\right) dz,$$

intervertir le signe de sommation et le signe $\int$; si l'on pose

$$H_k(u) = \gamma_0 + \gamma_1 u + \ldots + \gamma_{n_k} u^{n_k}$$

et

$$P_k(\zeta) = c_0\gamma_0 + c_1\gamma_1\zeta + \ldots + c_{n_k}\gamma_{n_k}\zeta^{n_k}, \qquad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

on aura

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\zeta),$$

le développement convergeant uniformément lorsque ζ reste dans le domaine D_n indiqué précédemment. Mais observons que les coefficients des P_k ne dépendent en rien de $\mathcal{A}_n$ ou de C_n et qu'ils restent les mêmes si n croissant, C_n tend vers la frontière de l'étoile relative à $f(z)$. De plus, lorsque n croît indéfiniment, C_n tendant vers la frontière de l'étoile de $f(z)$, le domaine de ζ tend vers cette étoile.

Tout domaine intérieur à cette étoile est donc, pour n assez grand ($n > N$), intérieur aux domaines D_n déterminés plus haut pour ζ relativement aux C_n d'indice $n > N$; par suite, puisque

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\zeta)$$

converge absolument et uniformément dans chacun de ces domaines D_n, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\zeta)$$

converge absolument et uniformément vers $f(\zeta)$ dans tout domaine intérieur à l'étoile de $f(\zeta)$.

Il est donc démontré que l'on peut, pour toute fonction $f(\zeta)$ dont le domaine d'existence comprend l'origine, former une série

de polynomes [dont on a appris à former les termes à l'aide du développement de $\frac{1}{1-u}$ et des coefficients de Taylor de $f(\zeta)$], série qui converge dans toute l'étoile vers $f(\zeta)$, et uniformément et absolument dans toute aire bornée intérieure à l'étoile. Ajoutons que ce développement est indéfiniment dérivable terme à terme si celui de $\frac{1}{1-u}$ l'est.

Nous n'insisterons pas sur la formation effective des polynomes $\Pi_k(u)$ du développement de $\frac{1}{1-u}$, en renvoyant aux Mémoires de M. Mittag-Leffler, ainsi qu'à un Mémoire de M. Runge (*Acta*, t. VI), et aux travaux de MM. Painlevé (*C. R. Acad. Sc.*, 1898 et 1899) et Hilbert (*Gött. Nachrichten*, mars 1897).



CHAPITRE III.

QUELQUES CONSÉQUENCES REMARQUABLES DU DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE POLYNOMES. L'EXTENSION DE LA THÉORIE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

Nous avons formé au Chapitre II des séries de polynomes convergentes dans toute l'étoile correspondant à la fonction $f(z)$; ce résultat est très intéressant en ce sens qu'il donne une *représentation* de la fonction valable dans toute l'étoile; mais théoriquement, au point de vue de la détermination de la fonction par sa valeur et celle de toutes ses dérivées à l'origine, il ne donne rien de plus que la théorie du prolongement analytique édifiée par Weierstrass. Tout point intérieur à l'étoile de $f(z)$ peut en effet être atteint en partant de O à l'aide d'un nombre fini de prolongements de la série de Taylor initiale; on peut, par des opérations bien précises, obtenir la valeur de $f(z)$ en ce point et au voisinage de ce point par des prolongements. Ajoutons que la méthode même par laquelle M. Mittag-Leffler forme des polynomes est basée sur le prolongement analytique et ne saurait, semble-t-il, donner davantage. Montrons par la suite comment la méthode dont nous nous sommes servis au Chapitre II, et qui est fondée sur les propriétés distributives de l'intégrale de Cauchy, nous permet, dans certains cas, de former des séries de polynomes convergeant hors de l'étoile de $f(z)$.

Un exemple simple fera bien comprendre l'importance de l'assertion précédente.

Considérons des points d'affixes $e^{2\pi i a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ (je dirai pour abréger les points a_n) répartis sur une circonférence de rayon 1, et y formant un ensemble dénombrable partout dense.

Nous prendrons pour cela les nombres rationnels $\frac{p}{q}$ compris entre 0 et 1, et nous les rangerons en suite simple, en les ordonnant par dénominateurs q croissant, tous les nombres ayant

même dénominateur étant classés par ordre de grandeur croissante.

Par exemple,

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = \frac{1}{3},$$
$$a_4 = \frac{2}{3}, \qquad a_5 = \frac{1}{4}, \qquad a_6 = \frac{3}{4}, \qquad \ldots.$$

Formons une fonction qui admette pour points singuliers tous les a_n. La fonction

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - e^{2\pi i a_n}}$$

remplit cette condition en supposant la série $\sum_0^{\infty} |A_n|$ convergente.

Lorsque z est intérieur au cercle de rayon 1, la série (1) converge et définit une fonction $f(z)$ holomorphe dans tout le cercle. Si z est extérieur à ce cercle, (1) définit également une fonction $f_1(z)$ holomorphe partout à l'extérieur de ce cercle. Je dis d'abord qu'il est impossible de passer de f à f_1 par le prolongement analytique de Weierstrass : le cercle lieu des a_n est une coupure pour chacune des fonctions f et f_1.

C'est un fait qui résulte de la densité des points a_n sur tous ces cercles et de la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$, mais qui n'est nullement évident *a priori*. Du fait qu'un point a_n est pôle simple d'un terme déterminé de la série (1) il ne s'ensuit pas qu'il soit un point singulier pour $f(z)$. Il suffit de se rendre compte que (1) comporte une infinité de termes dont les pôles respectifs tendent vers a_n, et l'on peut concevoir une compensation possible entre le terme $\frac{A_n}{z - a_n}$ et les termes dont les pôles tendent vers a_n.

En effet, prenons la série

$$F(z) = \sum \frac{\varphi(n) z^n}{1 - z^n},$$

$\varphi(n)$ désignant la fonction arithmétique bien connue sous le nom d'*indicateur de Gauss*. Elle est manifestement convergente à

l'intérieur du cercle de rayon 1, et dans tout cercle de rayon < 1 elle converge absolument et uniformément.

On a d'ailleurs

$$F(z) = \Sigma[\Sigma \varphi(\delta_k)] z^n = \Sigma n z^n = \frac{z}{(1-z)^2},$$

δ_n désignant tout diviseur de n. Tout ceci résulte des propriétés bien connues de la fonction $\varphi(n)$. La série $F(z)$ dont chaque terme n'a que des pôles simples représente donc une fonction analytique dont l'unique singularité est le pôle double $z = 1$. Ce point est le seul point singulier de la fonction sur le cercle de rayon 1, tandis que les points singuliers des termes de la série $F(z)$, $z = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ forment un ensemble dense partout sur ce cercle.

Cet exemple simple montre clairement les précautions à prendre et les erreurs auxquelles pourrait conduire une analyse trop superficielle. Dans le cas où la série $\Sigma|A_n|$ est convergente, la compensation ne se produit pas.

M. Goursat a démontré d'une façon générale (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XI et XVII) que toute ligne C sur laquelle se trouvent distribués des points α_n formant sur elle un ensemble dense est une coupure pour la fonction

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - \alpha_n},$$

c'est-à-dire que le cercle de convergence de la série de Taylor procédant suivant les puissances de $z - z_0$, relative à $f(z)$, ne peut contenir aucune portion de la ligne C.

Dans l'exemple particulier que nous avons choisi, il nous suffira de démontrer que si l'on se rapproche de l'un des points a_n sur un rayon, la valeur de $|f(z)|$ tend vers l'infini. Choisissons un a_n particulier et déplaçons-nous sur le rayon qui le joint au centre.

A cause de la convergence de $\Sigma|A_p|$, il est clair que pour k assez grand on aura

$$\sum_{k+1}^{\infty} |A_p| < |A_n|.$$

Partageons les termes de $f(z)$ en trois classes en écrivant

$$f(z) = f_1(z) + \frac{A_n}{z - e^{2\pi i a_n}} + f_2(z),$$

$$f_1(z) = \sum_1^{k}{}' \frac{A_p}{z - e^{2\pi i a_p}},$$

$$f_2(z) = \sum_{k+1}^{\infty} \frac{A_p}{z - e^{2\pi i a_p}}.$$

Le signe Σ' de $f_1(z)$ indique que l'indice $p = n$ a été omis dans la suite $1, 2, \ldots, k$.

$f_1(z)$ est une somme d'un nombre fini de termes. Elle est régulière au voisinage de $e^{2\pi i a_n}$, car c' est une fraction rationnelle dont les pôles sont distincts de $e^{2\pi i a_n}$. On peut donc la négliger sans inconvénient.

Il suffit de montrer que

$$\left| \frac{A_n}{z - e^{2\pi i a_n}} + f_2(z) \right|$$

tend vers l'infini si z tend vers $e^{2\pi i a_n}$ en suivant le rayon. Or, dans ces conditions

$$|z - e^{2\pi i a_n}| < |z - A|$$

quel que soit A distinct de $e^{2\pi i a_n}$ sur le cercle. Par suite

$$|f_2(z)| \leqq \sum_{k+1}^{\infty} \left| \frac{A_p}{z - e^{2\pi i a_p}} \right| < \sum_{k+1}^{\infty} \frac{|A_p|}{|z - e^{2\pi i a_n}|},$$

puisque $|z - e^{2\pi i a_p}| > |z - e^{2\pi i a_n}|$. Par suite

$$\left| \frac{A_n}{z - e^{2\pi i a_n}} + f_2(z) \right| > \frac{|A_n| - \sum_{k+1}^{\infty} |A_p|}{|z - e^{2\pi i a_n}|}.$$

Au deuxième membre, le numérateur est $\neq 0$ et > 0 par la manière dont k a été choisi, le dénominateur tend vers zéro si z tend vers $e^{2\pi i a_n}$ en suivant le rayon. Il est donc démontré que $|f(z)|$ tend vers l'infini dans les conditions précédentes; tout point a_n est bien un point singulier. On en conclut alors, l'ensemble des points

singuliers d'une fonction analytique étant un ensemble fermé, que tout point du cercle de rayon 1 est aussi un point singulier.

Ceci étant posé, sous certaines conditions de décroissance que devront vérifier les $|A_n|$, on peut transformer la série $f(z)$ en une série de polynomes $\Sigma P_k(z)$ $\Big[$les polynomes $P_k(z)$ se déterminant comme au Chapitre II à l'aide des coefficients de la série de Taylor de $f(z)$ relative à l'origine et un développement de $\frac{1}{1-u}$ en série de polynomes$\Big]$ qui converge sur une infinité de droites issues de l'origine, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du cercle de rayon 1. Pour être précis, reprenons l'exemple où les a_k sont les nombres rationnels $\frac{p}{q}$. Considérons la droite $z = \rho e^{2\pi i(\sqrt{2}-1)}$. Du nombre $\sqrt{2}-1 < 1$, nous allons utiliser la propriété d'incommensurabilité. On peut en quelque sorte mesurer la distance des divers points a_k à la droite précédente. Considérons en effet

$$\sqrt{2} - 1 - \frac{p}{q} = \sqrt{2} - \frac{p+q}{q}.$$

Puisque $|(p+q)^2 - 2q^2|$ n'est manifestement jamais nul, sa valeur est $\geqq 1$.

Donc

$$\left|\left(\frac{p+q}{q}\right)^2 - 2\right| \geqq \frac{1}{q^2},$$

$$\left|\frac{p+q}{q} - \sqrt{2}\right| \left|\frac{p+q}{q} + \sqrt{2}\right| \geqq \frac{1}{q^2}.$$

Pour tous les a_k on a

$$\frac{p+q}{q} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 + \frac{p}{q} > 1 + \sqrt{2} > 2.$$

Donc, quel que soit a_k, on a

$$\left|\frac{p+q}{q} - \sqrt{2}\right| > \frac{1}{2q^2}.$$

Considérons alors pour chaque point a_k le domaine $e^{2\pi i a_k}\mathcal{A}_{n_k}$ qui se déduit du domaine $\mathcal{A}_{n_k}$ que nous avons appris à former au Chapitre II pour la fonction $\frac{1}{1-u}$, en multipliant tous ses points

par $e^{2\pi i a_k}$ (n_k est un indice qui dépend de k). Montrons qu'il est possible de choisir les indices n_k de sorte que la demi-droite [1]

$$z = \rho e^{2\pi i(\sqrt{2}-1)} = \rho e^{2\pi i \theta}$$

soit intérieure à tous les domaines $\mathcal{A}_{n_k} e^{2\pi i a_k}$.

On a vu en effet que

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2},$$

et, comme $k > q$ en vertu de la façon dont on a rangé les nombres $\frac{p}{q}$,

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2k^2}.$$

L'angle $2\pi|\theta - a_k|$ de la droite $O\theta$ avec la droite Oa_k est donc $> \frac{2\pi}{2k^2}$. On veut que cet angle soit supérieur au demi-angle α_k des deux tangentes au cercle de rayon $\frac{1}{n_k}$ qui sert à former $\mathcal{A}_{n_k}$. Cet angle α_k a pour sinus

$$\sin\alpha_k = \frac{1}{n_k},$$

α_k est un angle compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ pour lequel on a certainement, quel que soit k,

$$\alpha_k < 2\sin\alpha_k = \frac{2}{n_k}.$$

Donc, pour que $2\pi|\theta - a_k|$ soit $> \alpha_k$, il suffit que

$$\frac{2\pi}{2k^2} > \frac{2}{n_k}.$$

Cette inégalité est satisfaite si

$$n_k = k^2.$$

En choisissant n_k par cette formule on est sûr que la droite $z = \rho e^{2\pi i\theta}$ est intérieure à tous les domaines $e^{2\pi i a_k}\mathcal{A}_{n_k}$, tout au moins jusqu'au cercle de rayon n_k qui limite chacun de ces

---

[1] Ou du moins un certain segment de cette droite ayant pour origine O et dépassant le cercle de rayon 1.

domaines : l'essentiel est qu'elle ait un segment dépassant le cercle de rayon 1 intérieur à tous ces domaines.

Considérons alors la série

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - e^{2\pi i a_k}}$$

ou, ce qui revient au même, en changeant les signes

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i a_k} A_k}{1 - z e^{-2\pi i a_k}}.$$

Le point z décrivant un segment fini de la droite $z = \rho e^{2\pi i \theta}$ que nous pouvons par exemple supposer de longueur égale à $2 (0 \leqq \rho \leqq 2)$, le point $z e^{-2\pi i a_k}$ est intérieur au domaine $\mathcal{A}_{n_k}$. On a donc

$$\frac{1}{1 - z e^{-2\pi i a_k}} = \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_p(z e^{-2\pi i a_k}),$$

où le deuxième membre est la série de polynômes que nous avons appris à former au Chapitre II ; elle converge absolument et uniformément sur tout le segment $(0 \leqq \rho \leqq 2)$ et l'on a sur ce segment, comme d'ailleurs dans tout le domaine $e^{2\pi i a_k} \mathcal{A}_{n_k}$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} | \Pi_p(z e^{-2\pi i a_k}) | < M_{n_k},$$

M_{n_k} étant un nombre qui dépend de l'indice $n_k = k^2$.

Envisageons la série double

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi i a_k} A_k \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_p(z e^{-2\pi i a_k}).$$

La série des modules de ses termes est

$$\sum_{k=1}^{\infty} | A_k | \sum_{p=0}^{\infty} | \Pi_p(z e^{-2\pi i a_k}) |.$$

Si la série

$$\sum_k | A_k | M_{n_k}$$

est convergente, cette série double sera absolument et uniformément convergente lorsque z décrira le segment $0 \leqq \rho \leqq 2$ et elle

représentera

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}$$

sur tout ce segment [1].

Or il suffit de prendre

$$|A_k| < \frac{1}{M_{n_k}} \frac{1}{k^2}$$

pour que la série

$$\Sigma |A_k| M_{n_k}$$

converge; et ceci est toujours possible, les A_k n'étant soumis qu'à des inégalités pouvant être choisis de façon très large.

Sous ces conditions, la série

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi i a_k} A_k \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_p(z\, e^{-2\pi i a_k})$$

étant absolument et uniformément convergente, on peut intervertir la sommation et l'écrire

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi i a_k} A_k \Pi_p(z\, e^{-2\pi i a_k}).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi i a_k} A_k \Pi_p(z\, e^{-2\pi i a_k}) = P_p(z),$$

P_p étant le polynome qu'on déduit du polynome $\Pi_p(u)$ à l'aide des coefficients de Taylor de la fonction

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z};$$

c'est ce qu'il est facile de voir.

En effet, la série de Taylor de $f(z)$ est

$$f(z) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q z^q$$

---

(1) Cela démontre, dans nos hypothèses, la convergence de la série $\sum_k \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}$ sur le segment étudié.

et l'on a

$$c_q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k (q+1)}}.$$

Si l'on a

$$\Pi_p(u) = \gamma_{0,p} + \gamma_{1,p} u + \ldots + \gamma_{N,p} u^N,$$

on a

$$P_p(z) = \alpha_0 \gamma_{0,p} + \alpha_1 \gamma_{1,p} z + \ldots + \alpha_N \gamma_{N,p} z^N$$

avec

$$\alpha_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k}} = c_0,$$

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k 2}} = c_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha_N = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k (N+1)}} = c_N.$$

Donc

$$P_p = c_0 \gamma_{0,p} + c_1 \gamma_{1,p} z + \ldots + c_N \gamma_{N,p} z^N,$$

formule qui montre que P_n est bien le polynome que nous avons appris à former au Chapitre II.

La série

$$\sum_{p=0}^{\infty} P_p(z)$$

converge donc sur le segment $0 \leqq \rho \leqq 2$ de la droite $z = \rho e^{2\pi i \theta}$ et la convergence est uniforme vers la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}.$$

La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}$$

définit, au sens de Weierstrass, nous l'avons vu, une fonction monogène $f(z)$ à l'intérieur du cercle-unité, et une fonction $f_1(z)$ à l'extérieur de ce cercle. Ces fonctions n'ont aucune relation entre elles d'après Weierstrass, c'est-à-dire que f ayant pour domaine d'existence l'intérieur du cercle-unité et $f_1(z)$ l'extérieur, il est impossible de tirer f de f_1 ou f_1 de f par prolongement; et cepen-

dant, nous avons dans ce qui précède relié entre elles les fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ à l'aide de la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} P_p(z)$$

qui dans le cercle-unité représente $f(z)$ et hors du cercle représente f_1, tout au moins lorsque z est sur le rayon

$$z = \rho\, e^{2\pi i\theta} \qquad (0 \leqq \rho \leqq 2).$$

Nous avons précédemment supposé $\rho \leqq 2$ simplement pour fixer les idées. Le même raisonnement peut se faire pour tout *segment fini* de la droite

$$z = \rho\, e^{2\pi i\theta}.$$

Ce segment sera pour k assez grand $(k > k_0)$ intérieur à tous les domaines $e^{2\pi i a_k}\mathcal{A}_{n_k}$. Pour les fractions de la série

$$\sum_k \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}$$

dont l'indice est $> k_0$, le raisonnement précédent est valable. Quant aux fractions d'indice $< k_0$, elles sont en nombre fini; on peut les développer chacune en série de polynomes uniformément convergente sur le segment fini envisagé qui ne passe évidemment par aucun des pôles de chacune de ces fractions. En ajoutant ces séries de polynomes en nombre fini à celle que l'on a formée comme précédemment à l'aide de la fonction

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z},$$

on a une série de polynomes uniformément convergente sur tout le segment et représentant

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}.$$

Ce premier point acquis, montrons qu'il y a une infinité de droites jouissant de la même propriété que la droite $z = \rho e^{2\pi i(\sqrt{2}-1)}$.

Remarquons pour cela que la seule propriété de cette droite

dont nous nous soyons servis est que l'on a toujours

$$\left|(\sqrt{2}-1)-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{2q^2}.$$

Or considérons un nombre quadratique quelconque de la forme

$$\theta = m\sqrt{2}+n,$$

m et n étant des entiers $m \neq 0$ on a, quels que soient p et q,

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right| = \frac{|qm\sqrt{2}+nq-p|}{q}.$$

Multipliant haut et bas par $|-qm\sqrt{2}+nq-p|$, le numérateur devient un entier qui est visiblement $\neq 0$, donc $\geqq 1$, et par suite on a

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q\,|qm\sqrt{2}+nq-p|},$$

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{hq^2},$$

h étant un certain nombre indépendant de q, et comme $k>q$ lorsque $\alpha_k=\frac{p}{q}$, on peut supposer qu'on a ajouté un entier à $\frac{p}{q}$, ce qui ne change rien à $e^{2\pi i \alpha_k}$,

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{hk^2}.$$

Or on a vu que

$$\alpha_k < \frac{2}{n_k}.$$

En déterminant n_k de façon que

$$\frac{2\pi}{hk^2} > \frac{2}{n_k},$$

où $n_k > \mathrm{CK}^2$, C étant une constante, le raisonnement se poursuit en tous points semblable au cas où $\theta=\sqrt{2}-1$.

Toute droite faisant avec Ox un angle $\theta = m\sqrt{2}+n$ est donc une droite de convergence pour la série de polynomes (il n'est pas inutile de remarquer que cette série ne dépend en rien du nombre θ). Et comme on peut, m et n étant convenablement

choisis, rendre $m\sqrt{2}+n$ aussi voisin de tout nombre rationnel qu'on le voudra, on voit en somme que :

L'on peut former une série

$$\sum_{p=1}^{\infty} P_p(z)$$

qui converge uniformément sur tout segment fini de toute droite d'argument $\theta = m\sqrt{2}+n$, *il y a dans tout angle issu de l'origine une infinité dénombrable de ces droites (tous les nombres quadratiques* $m\sqrt{2}+n$ *forment un ensemble dénombrable); sur chacune de ces droites, la série converge vers la valeur de la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}.$$

La série de polynomes

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)$$

constitue donc un vrai prolongement de la fonction $f(z)$ que représente $\sum \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}$ dans le cercle-unité, hors de ce cercle, prolongement qui s'effectue par une infinité dénombrable de rayons traversant le cercle.

Remarque. — Les propriétés des droites de convergence ont été déduites dans ce qui précède des propriétés arithmétiques des nombres algébriques (inégalités dues à Liouville) et l'on peut également se servir des propriétés des fractions continues.

Il est utile de remarquer que l'on peut démontrer *l'existence* de ces droites par une méthode d'exclusion qui, à vrai dire, ne permet pas, comme la méthode précédente, de donner effectivement les équations des droites de convergence, mais qui présente sur elle l'avantage de s'appliquer, quel que soit l'ensemble des points a_k donnés sur le cercle-unité.

Imaginons en effet un ensemble dénombrable de points a_k denses partout sur le cercle de rayon 1. Choisissons une constante h que

nous déterminerons plus loin, et de chaque côté du point a_k détachons un arc du cercle de longueur $\frac{h}{k^2}$. La somme des longueurs des arcs enlevés est

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2h}{k^2} = 2h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2h\frac{\pi^2}{6}$$

comme il est bien connu. On peut choisir h en sorte que cette longueur soit $< \varepsilon$, ε étant un nombre positif donné aussi petit qu'on veut. Il est visible alors que sur tout arc du cercle de longueur ε il y aura au moins un point qui n'aura pas été enlevé ([1]), donc il y a certainement *une droite issue de* O *extérieure à tous les arcs précédents*. Si alors on choisit un indice n_k fonction de k, en sorte que cette droite soit intérieure à tous les domaines $e^{2\pi i a_k} \mathcal{A}_{n_k}$ (ou du moins un segment fini de cette droite), ce qui est évidemment vérifié si l'on a

$$\alpha_k < \frac{h}{k^2} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{n_k} < \frac{h}{k^2}.$$

On voit que dans tout angle d'ouverture ε il y aura au moins une droite ayant un segment fini (segment de longueur > 1) intérieur à tous les $e^{2\pi i a_k} \mathcal{A}_{n_k}$. On peut même par exemple, en choisissant $n_k = k^3$, s'arranger pour que, *quel que soit* h, fixé *a priori*, pour $k > k_0$, k_0 étant convenablement choisi et dépendant de h, on ait

$$\frac{2}{n_k} < \frac{h}{k^2};$$

alors, dans tout angle arbitrairement petit (et par suite pour h arbitrairement petit), il y a une droite (et par suite une infinité) dont un segment fini (d'ailleurs arbitrairement grand, à condition que k_0 soit assez grand) est intérieur à tous les domaines $e^{2\pi i a_k} \mathcal{A}_{n_k}$ $(k > k_0)$.

Choisissons les numérateurs A_k en sorte que

$$\Sigma |A_k| M_{n_k}$$

([1]) C'est là un point qui pourra paraître évident. Le lecteur en trouvera une démonstration rigoureuse dans les *Leçons sur la théorie des fonctions*, 2ᵉ édition, p. 43.

converge; on voit que l'on peut trouver une série de polynomes

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)$$

convergeant sur une droite au moins dans tout angle choisi *a priori*, convergeant uniformément sur tout segment fini de cette droite vers la somme de la série

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z},$$

k_0 étant un indice qui dépend de l'ouverture d'angle choisie *a priori*, et la droite précédente ne passant en outre par aucun des points a_k d'indice $< k_0$ qui sont en nombre fini. La fraction rationnelle

$$\sum_{k=1}^{k_0} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}$$

n'ayant pas ses pôles sur la droite D précédente, on peut former la série de polynomes de même classe que la précédente, et qui sur tout segment fini de D converge uniformément vers

$$\sum_{k=1}^{k_0} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}.$$

Finalement, en ajoutant les deux séries précédentes, on voit *qu'il est possible de former une série de polynomes, de classe bien déterminée* $\left(\text{fixée par le développement de } \frac{1}{1-u} = \Sigma \Pi_k(u) \text{ qu'on aura choisi } a\ priori\right)$ *qui, dans tout angle ayant son sommet à l'origine, possède une infinité de droites de convergence, sur lesquelles elle converge uniformément dans tout segment fini vers la somme de la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}.$$

L'utilité de l'extension donnée précédemment à la notion de prolongement analytique va nous apparaître dans une question

intéressante qui, considérée du seul point de vue de Weierstrass, paraît offrir de sérieuses difficultés.

Considérons un domaine, par exemple l'intérieur d'une circonférence C de centre O de rayon 1. Soient a_n des points isolés extérieurs à C formant un ensemble dénombrable ayant pour points limites tous les points de la circonférence. Il n'y a cependant aucun point a_n sur cette circonférence. Pour réaliser un pareil ensemble, on prendra par exemple une circonférence C_n de rayon $1+\varepsilon_n$ concentrique à C. Sur elle on placera un nombre fini de points a_k, puis on fera croître n indéfiniment en sorte que ε_n décroisse et tende vers zéro, pendant que l'écart entre deux points a_k du cercle C_n tende vers zéro.

Envisageons alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z-a_n}$$

en supposant $\Sigma|A_n|$ convergente. Cette série définit à l'extérieur de C une fonction $F_1(z)$ qui admet tous les points a_n pour pôles, puisque en un point a_n tous les termes de la série, sauf un seul, sont réguliers et que la série, abstraction faite du terme devenant infini en a_n, converge absolument et uniformément dans un petit cercle autour de a_n. Si donc on forme la série de Taylor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu (z-z_0)^\nu$$

relative à $F_1(z)$ son cercle de convergence passe par le pôle a_n le plus voisin de z_0. Mais si z_0 tend vers la circonférence C, il est visible que ce rayon tendra vers zéro. Donc C est une coupure pour la fonction $F_1(z)$.

Lorsque z est intérieur à la circonférence C, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z-a_n}$$

converge absolument et elle converge uniformément dans tout domaine intérieur à C. Elle définit donc dans C une fonction $F(z)$ holomorphe. On peut se demander si cette fonction $F(z)$ est pro-

longeable au delà de C; le fait que C soit une coupure pour $F_1(z)$ n'entraîne pas que C soit coupure pour $F(z)$, car *a priori* $F(z)$ et $F_1(z)$ n'ont aucune relation particulière. Tout ce qu'on peut dire, c'est que si $F(z)$ était prolongeable au delà de C, son prolongement ne coïnciderait pas avec $F_1(z)$ qui admet C pour ligne singulière. Et ceci suffit à mettre en garde contre un essai de démonstration qui admettrait implicitement l'identité entre $F_1(z)$ et le prolongement de $F(z)$. La question, prise du point de vue de Weierstrass, consiste à former le développement de Taylor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu (z - z_0)^\nu$$

de $F(z)$, z_0 étant intérieur à C, et voir si le cercle de convergence est tangent à C ou coupe C; dans le premier cas C sera une coupure, dans le deuxième $F(z)$ sera prolongeable au delà de C.

Les résultats obtenus dans cette voie sont particuliers. M. Pringsheim, dans les *Mathematische Annalen* (t. XLII-XLIV), a donné des exemples (où la distribution des points a_n offre une certaine régularité) dans lesquels C est bien une coupure [1]. Mais, dans le cas général, où l'on suppose simplement que les points a_n isolés ont pour limite C et où l'on admet uniquement des hypothèses de convergence sur les $|A_n|$, le problème de la possibilité du prolongement de $F(z)$ n'est pas résolu au point de vue de Weierstrass.

Cependant ce simple fait que le prolongement de $F(z)$, s'il existe, ne saurait coïncider avec $F_1(z)$, montre l'impossibilité de ce prolongement dans certains cas. En effet, rien ne nous empêche de faire le développement en série de polynomes de $F(z)$, comme nous l'avons fait précédemment pour

$$\sum \frac{A_k}{e^{2\pi i a_k} - z}.$$

En prenant les $|A_k|$ tels que la série $\Sigma |A_k| M_{k^3}$ soit convergente, ce qui astreint les $|A|$ à des conditions de décroissance rapide, on verra comme précédemment qu'il y a dans tout angle de sommet

---

(1) *Voir* aussi un cas où les restrictions apportées à la distribution des pôles sont d'un autre genre, dans le *Bulletin de la Société mathématique*, 1913 (G. Julia, *Sur les lignes singulières de certaines fonctions analytiques*).

l'origine une infinité de droites sur lesquelles le développement converge vers la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - a_k}.$$

Si $F(z)$ était prolongeable sur une portion de C, il y aurait des droites de convergence issues de O et traversant cette portion; la série de polynomes représenterait sur la portion de ces droites extérieure à C, d'une part le prolongement de $F(z)$, d'autre part la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - a_k},$$

c'est-à-dire $F_1(z)$. Ceci est impossible, car $F_1(z)$ et le prolongement de $F(z)$ coïncidant sur une ligne coïncideraient partout.

Notre prolongement par les séries (M) offre donc ici l'avantage de faire mieux connaître la façon dont, au point de vue de Weierstrass, se comportent les fonctions analytiques, puisqu'il nous a montré que dans certaines hypothèses sur la décroissance des $|A_n|$ la fonction $F(z)$ n'est pas prolongeable au sens de Weierstrass.

Disons en terminant quelques mots sur le type de fonctions que nous venons de rencontrer et qui sont représentées par des séries de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n}.$$

Nous y avons été conduits au Chapitre II quand nous avons remplacé l'intégrale de Cauchy par une série de fractions rationnelles de la forme précédente. Un tel type de fonctions a été souvent utilisé pour former des fonctions à espace lacunaire. Poincaré les a utilisées dans un Mémoire publié aux *Acta Societatis Fennicæ*, t. XIII, 1881. Voici le principe de sa méthode :

Considérons trois points d'affixes α, β, γ non en ligne droite (la même chose pourrait se dire de points occupant les sommets d'un polynome convexe). Envisageons tous les points

$$a_{p,q,r} = \frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{p + q + r},$$

p, q, r étant des entiers positifs. Ce sont des points intérieurs au triangle $\alpha\beta\gamma$ si $pqr \neq 0$; si $p = 0$, par exemple, le point est sur $\beta\gamma$.

Formons la série

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty}{}' \frac{A_{p,q,r}}{z - a_{p,q,r}}, \tag{1}$$

où le signe $'$ indique que l'on exclue la combinaison $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$. En supposant $\Sigma |A_{p,q,r}|$ convergente, la série est convergente à l'extérieur du triangle $\alpha\beta\gamma$, et définit à l'extérieur de ce triangle une fonction analytique $f(z)$. La série (1) ayant des termes dont les pôles sont partout denses sur les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$, il s'ensuit, comme le démontre Poincaré, et comme nous l'avons démontré nous-même pour l'exemple particulier traité au début de ce Chapitre, que les trois côtés du triangle forment une coupure pour la fonction $f(z)$, donc cette fonction admet l'intérieur du triangle pour espace lacunaire.

La question est plus compliquée si l'on considère

$$g(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_{p,q,r}}{z - a_{p,q,r}}.$$

Aucun des points $a_{p,q,r}$ n'est donc sur les côtés de α, β, γ et la question du prolongement de $g(z)$ à l'intérieur du triangle soulève des difficultés qui ne sont levées que par la méthode d'extension du prolongement donnée précédemment, et dans le cas où les $|A|$ satisfont aux conditions de décroissance que nous avons déjà indiquées.



CHAPITRE IV.

LES ENSEMBLES DE MESURE NULLE.

RAPPEL DES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FRACTIONS CONTINUES.

On sait qu'une expression de la forme

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}}}$$

s'appelle *une fraction continue*.

On la désigne aussi par le symbole $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$; a_1, a_2, ..., a_n, ... sont des entiers positifs. Si la suite $(a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ comporte un nombre fini de nombres, la fraction est dite *limitée;* si elle comporte une infinité de nombres, la fraction est dite *illimitée* [1]. Les nombres a_n sont dits *quotients incomplets*. Les fractions limitées

$$\frac{P_n}{Q_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

sont appelées *réduites*, $\frac{P_n}{Q_n}$ est la réduite de rang n, ..., P_n et Q_n sont respectivement le numérateur et le dénominateur de la fraction limitée quand on a effectué les opérations indiquées pour n'avoir plus qu'une seule barre de fraction

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = a_2, \qquad P_3 = a_2 a_3 + 1,$$
$$Q_1 = a_1, \qquad Q_2 = a_1 a_2 + 1, \qquad Q_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3,$$

(1) Un nombre α étant donné < 1, l'algorithme du plus grand commun diviseur permet de le développer en fraction continue.

On démontre [1] que

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

On a ainsi

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}},$$

égalité qui prouve que P_n et Q_n sont premiers entre eux.

On peut donc écrire

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{(-1)^{m-1}}{Q_m Q_{m-1}}$$

avec $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$. $\frac{P_n}{Q_n}$ tend vers α quand n croît indéfiniment et l'on peut écrire la valeur de la fraction continue sous forme de série convergente

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{Q_m Q_{m-1}}.$$

Si enfin on remarque que $Q_m > 2 Q_{m-2}$, puisque les Q_m vont en croissant avec m, on voit que

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} \right|.$$

Les réduites approchent donc de α alternativement par excès et par défaut.

La propriété fondamentale des fractions continues est la suivante :

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction qui approche plus de α que $\frac{P_n}{Q_n}$; alors nécessairement $b > Q_n$; en d'autres termes, pour toute fraction $\frac{a}{b}$, telle que $b < Q_n$, on a

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| > \left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right|.$$

L'approximation déjà très bonne des réduites d'une fraction

[1] Nous ne faisons ici que rappeler des résultats. Le lecteur trouvera les démonstrations dans les *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 127.

continue est rendue meilleure par l'introduction des *réduites intermédiaires*.

Entre $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$, les fractions $\frac{A_{n,h}}{B_{n,h}}$, où

$$A_{n,h} = h P_{n-1} + P_{n-2},$$
$$B_{n,h} = h Q_{n-1} + Q_{n-2} \qquad (h = 0, 1, \ldots, a_n),$$

sont dites *réduites intermédiaires*.

Approximation des incommensurables par les nombres rationnels. — Soit α un nombre incommensurable; on se propose de chercher les nombres rationnels $\frac{p}{q}$ qui approchent le plus de α sans que q soit trop grand.

La théorie des fractions continues nous donne immédiatement une réponse.

Développons α en fraction continue et soient $\frac{P_n}{Q_n}$, $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ les réduites de rang n et $n+1$,

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Il existe donc, nous en sommes certains, une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ (les réduites) tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Pour certains nombres, on peut resserrer davantage cette approximation par les réduites (voir *Leçons sur la croissance*, p. 132 et suiv.).

On a vu que

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}};$$

mais si l'on envisage $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}$, on a

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \left|\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} - \frac{P_n}{Q_n}\right|;$$

or

$$P_{n+2} = a_{n+2} P_{n+1} + P_n,$$
$$Q_{n+2} = a_{n+2} Q_{n+1} + Q_n.$$

Donc

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{a_{n+2}}{Q_n Q_{n+2}} = \frac{a_{n+2}}{Q_n(a_{n+2} Q_{n+1} + Q_n)}.$$

Ceci s'écrit

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{1}{Q_n\left(Q_{n+1} + \frac{Q_n}{a_{n+2}}\right)},$$

mais

$$Q_{n+1}\ Q_n \geq \frac{Q_n}{a_{n+2}}.$$

Donc, *a fortiori*,

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{1}{2 Q_n Q_{n+1}},$$

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{\theta}{Q_n Q_{n+1}} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{2} < |\theta| < 1.$$

Si l'on remarque que

$$Q_{n+1} = a_{n+1} Q_n + Q_{n-1},$$

on voit qu'on pourra prendre $\frac{1}{a_{n+1} Q_n^2}$ pour valeur asymptotique de $\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right|$, car le rapport de $\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right|$ à $\frac{1}{a_{n+1} Q_n^2}$ reste toujours compris entre des limites finies; ce qui est certain, c'est que $\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right|$ étant $< \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$ sera *a fortiori* $< \frac{1}{a_{n+1} Q_n^2}$, et l'on peut également de l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{1}{2 Q_n Q_{n+1}}$$

tirer *a fortiori*

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{1}{2(a_{n+1} + 1) Q_n^2}.$$

Ces inégalités entraînent des conséquences intéressantes; on voit en somme que l'ordre d'approximation de α par $\frac{P_n}{Q_n}$ dépend d'abord de Q_n, qui dépend lui-même de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, puis de a_{n+1} qu'on peut se donner indépendamment de $a_1, \ldots, a_n$ quand on définit α par son développement en fraction continue.

Un cas très simple est celui où l'on suppose que les a_n ne croissent pas très rapidement. Supposons-les par exemple finis ($a_n < M$), on a ainsi une classe très intéressante de fractions con-

tinues, à laquelle appartiennent, par exemple, les développements des nombres quadratiques, ou nombres racines d'équations du deuxième degré à coefficients entiers, développements remarquables à plus d'un titre. On a alors

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \frac{1}{2(M+1)Q_n^2}.$$

La meilleure approximation de α par des nombres rationnels ne peut dans ce cas dépasser $\frac{1}{Q_n^2}$ au facteur constant $\frac{1}{2(M+1)}$ près.

On peut alors se demander s'il existe des nombres irrationnels pour lesquels on peut dépasser notablement l'approximation précédente.

Ce sera impossible avec des nombres a_n ne croissant pas très vite.

Si, par exemple, on prend $a_n = n$, on a

$$Q_n > n!.$$

Dans la valeur asymptotique $\frac{1}{a_{n+1} Q_n^2}$ de l'approximation,

$$a_{n+1} = n + 1$$

est très petit vis-à-vis de Q_n, car $n!$ est comparable à $\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

De

$$Q_n > \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

on déduit

$$n > e Q_n^{\frac{1}{n}}.$$

Donc $\frac{1}{a_{n+1} Q_n^2}$ est comparable à

$$\frac{1}{2 Q_n^{2+\frac{1}{n}}}.$$

L'exposant de Q_n tend vers 2 quand n augmente indéfiniment; on n'a donc pas obtenu une approximation bien meilleure qu'avec des fractions continues dont les quotients incomplets sont bornés.

Mêmes remarques pour $a_n = n^k$ ou $a_n \sim e^n$ [1]. Si a_n est une

---

[1] $a_n \sim e^n$ signifie a_n entier de l'ordre de e^n.

fonction croissante de n du type usuel, Q_n croîtra plus vite que a_{n+1} et $\frac{1}{a_n Q_n^2}$ sera comparable à $\frac{1}{Q_n^2}$ ou $\frac{1}{Q_n^3}$. Mais on peut choisir des a_n croissant très rapidement, en basant leur croissance, non plus sur n, mais sur Q_n. Q_n ne dépend en effet que de $a_1, \ldots, a_n$. On peut donc choisir

$$a_{n+1} = \varphi(Q_n),$$

φ étant telle fonction qu'on voudra et dont la croissance reste à notre disposition. On voit alors que l'approximation par les réduites des nombres obtenus par de tels développements en fraction continue, se resserre autant qu'on le veut, à condition de choisir des fonctions φ assez croissantes.

Si, par exemple, $a_{n+1} = Q_n^k$, on aura

$$Q_{n+1} > Q_n^{k+1}.$$

Donc

$$a_{n+2} > Q_n^{k(k+1)} > Q_n^{k^2}$$

et en général

$$a_{n+p} > Q_n^{k^p}$$

est de l'ordre de croissance de deux exponentielles superposées, à savoir e^{e^n}.

Si l'on prend $a_{n+1} \sim e^{Q_n}$, on aura

$$Q_{n+1} > e^{Q_n}$$

et

$$a_{n+2} > e^{e^{Q_n}}.$$

De façon générale

$$a_{n+p} > e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^{Q_n}}}}} \Big\} p \text{ fois},$$

a_n croît plus vite que toute fonction comportant un nombre fini k d'exponentielles superposées

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^{Q_n}}}}} \Big\} k \text{ fois}.$$

En somme, en choisissant

$$a_{n+1} = \varphi(Q_n) \text{ (}^1\text{)},$$

(1) Le fait que a_{n+1} doit être entier indique qu'on prendra pour a_{n+1} l'entier le plus voisin de $\varphi_p(Q_n)$. Pour alléger l'exposition, nous posons $a_{n+1} = \varphi(Q_n)$.

on définit une fraction continue bien déterminée dont la valeur est α et pour laquelle on a

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^2 \varphi(Q_n)}.$$

Comme φ peut être choisie aussi croissante qu'on voudra, on voit qu'on peut trouver des nombres irrationnels dont l'approximation par les réduites de leur développement (réduites qui sont des nombres rationnels) soit aussi étroite que l'on voudra.

Autrement dit, si l'on se donne une fonction $\psi(q)$ de l'entier q aussi croissante qu'on voudra, on peut définir des nombres irrationnels α, tels qu'il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ pour lesquels

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\psi(q)}.$$

En effet, on se donnera arbitrairement les n premiers quotients incomplets de α, n ayant une valeur quelconque, puis on définira les suivants par une relation de récurrence convenable, par exemple

$$a_{k+1} = \varphi(Q_k),$$

alors, à partir du rang n, les réduites vérifieront

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k^2 \varphi(Q_k)};$$

si l'on a choisi φ telle que $q^2\varphi(q)$ soit plus croissante que ψ, α est un nombre de l'espèce indiquée, car on a une infinité de nombres $\frac{p}{q}$, à savoir $\frac{P_k}{Q_k}$ pour $k = n+1, n+2, \ldots, \infty$ tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\psi(q)}.$$

Le fait qu'on peut choisir arbitrairement les n premiers quotients incomplets de α, ainsi que la latitude permise dans le choix de $\varphi(q)$, nous permettent d'affirmer qu'il existe dans tout intervalle, arbitrairement petit, des nombres α irrationnels de l'espèce précédente.

En effet, il suffira de choisir les premiers quotients incomplets

de sorte que les premières réduites tombent dans l'intervalle fixé, alors toutes les réduites suivantes seront dans cet intervalle.

On peut même dire plus : au lieu de prendre $a_{k+1} = \varphi(Q_k)$, nous pouvons prendre

$$a_{k+1} > \varphi(Q_k),$$

et toutes les conclusions précédentes seront vraies *a fortiori*. Il est alors facile de voir que l'ensemble des nombres α, définis par de tels développements en fraction continue, a la puissance du continu.

En effet, α dépend d'une suite infinie de nombres a_n, deux valeurs de α ne pouvant être égales que si tous les nombres de leur développement sont les mêmes (à cause de l'unicité du développement en fraction continue de tout nombre), et chacun des a_n n'est soumis qu'à une inégalité de la forme

$$a_{n+1} > \varphi(Q_n).$$

On a donc une infinité de valeurs entières à choisir pour chacun des a_n : considérons-en deux seulement, une paire, l'autre impaire, et faisons leur correspondre les nombres 0 et 1; il est alors bien clair qu'à tout nombre défini par son développement

(1) $$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

correspond une suite composée des nombres 0 et 1 dans un certain ordre

(2) $$011010001110\ldots.$$

On peut imaginer que cette suite définit un nombre

$$0{,}011010001110\ldots$$

compris entre 0 et 1 écrit dans le système à base 2. Inversement, à tout nombre compris entre 0 et 1 correspond une suite (2) bien déterminée et, par suite, une suite (1), c'est-à-dire un nombre α.

L'ensemble (E) de nos nombres α définis en ne donnant à chacun des a_n que deux valeurs possibles a donc même puissance que l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 1, il a la puissance du continu. *A fortiori*, donc l'ensemble des nombres α que nous avons appris à définir plus haut a-t-il la puissance du

continu, car sa puissance, supérieure à celle de l'ensemble (E), puisque l'ensemble des α contient (E), est inférieure à celle de tous les nombres compris entre 0 et 1, puisque les α ne constituent qu'une partie de ces nombres, et que cet ensemble (0, 1) a par définition la puissance du continu.

LES ENSEMBLES RÉGULIERS DE MESURE NULLE.

Considérons dans l'intervalle (0, 1) une infinité de points formant un ensemble dénombrable partout dense dans l'intervalle. Ces points s'appelleront des *points fondamentaux*. Nous allons supposer, pour la simplicité de l'exposition, que ces points sont tous les points d'abscisse rationnelle. Un théorème que nous démontrerons ultérieurement permettra de déduire de l'étude que nous allons faire, pour ce cas qui semble particulier, une étude toute analogue pour le cas général où les points fondamentaux forment un ensemble dénombrable dense quelconque.

Ordonnons les points d'abscisse rationnelle suivant une loi déterminée et soit $\frac{p}{q} = \alpha_n$ un de ces nombres. Si l'on adopte le mode de numérotage que nous avons déjà rencontré au cours de ces Leçons, *on peut supposer* $n < q^2$.

Autour du point α_n nous excluons un intervalle d'amplitude $\varphi_1(n)$ ayant son centre en α_n. Faisons la même opération autour de chacun des points fondamentaux, nous avons ainsi une infinité dénombrable d'intervalles d'exclusion

$$\varphi_1(1), \quad \varphi_1(2), \quad \ldots, \quad \varphi_1(n), \quad \ldots.$$

Nous supposons que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(n)$$

est convergente.

Soit E_1 l'ensemble des *points intérieurs aux intervalles ainsi exclus*. (Les points limites d'un intervalle ne sont pas considérés comme intérieurs à l'intervalle. On emploie dans ces conditions la locution « strictement intérieur » par opposition à « intérieur au

sens large » qui correspond au cas où les extrémités d'un intervalle sont considérées comme faisant partie de l'intervalle.)

Dans une deuxième opération nous adoptons des intervalles d'exclusion

$$\varphi_2(1),\quad \varphi_2(2),\quad \ldots,\quad \varphi_2(n),\quad \ldots$$

autour des points fondamentaux. Nous supposons

$$\varphi_2(n) < \varphi_1(n)$$

quel que soit n. L'ensemble E_2 des points intérieurs aux intervalles d'exclusion est compris dans E_1.

Continuons indéfiniment. Autour de chaque point α_n, nous excluons successivement

$$\varphi_1(n),\quad \varphi_2(n),\quad \ldots,\quad \varphi_k(n),\quad \ldots.$$

Nous supposons que

$$\varphi_1(n) > \varphi_2(n) > \ldots > \varphi_k(n) > \ldots$$

et

$$\lim_{k=\infty} \varphi_k(n) = 0.$$

[On pourrait par exemple prendre $\varphi_k(n) = \frac{1}{k}\,\varphi_1(n)$.]

Soit E_k l'ensemble des points intérieurs aux intervalles $\varphi_k(n)$.

On a obtenu par ce procédé une suite d'ensembles

$$E_1,\quad E_2,\quad \ldots,\quad E_k,\quad \ldots,$$

dont chacun contient tous les points du suivant. On peut alors très bien définir l'*ensemble* E *des points communs à tous ces ensembles*.

α_n étant intérieur à tous les $\varphi_k(n)$ l'est à tous les E_k, il est donc de E. Donc l'ensemble E comprend au moins tous les points fondamentaux α_n.

Du fait que tous les intervalles $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$, ..., $\varphi_k(n)$, ... ont pour seul point commun α_n, on pourrait être tenté de conclure que E ne comprend que les α_n, si l'on n'était familier des raisonnements sur la continuité uniforme.

Nous allons démontrer que, *quelque rapide que soit la décroissance des φ_k en fonction de k, l'ensemble* E *comprend toujours une infinité de points distincts des α_n, c'est-à-dire de points*

d'abscisse irrationnelle (nous dirons points irrationnels) *et même une infinité ayant la puissance du continu.*

Nous avons besoin pour cela d'un lemme sur les fonctions croissantes, connu sous le nom de *théorème de Paul Dubois-Reymond :*

Si l'on a une infinité dénombrable de fonctions croissantes

$$\psi_1(x),\quad \psi_2(x),\quad \ldots,\quad \psi_n(x),\quad \ldots.$$

on peut trouver une fonction $\psi(x)$ qui croît plus vite que chacune d'elles, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\psi(x)}{\psi_n(x)} = +\infty \text{ (1)}.$$

Pour donner un exemple, prenons

$$\psi_1(x) = x, \qquad \psi_2(x) = x^2, \qquad \ldots, \qquad \psi_n(x) = x^n, \qquad \ldots.$$

La fonction $\psi(x) = e^x$ croît plus vite que ψ_n, quel que soit n, car

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,$$

x^x croît plus vite que e^x, donc plus vite que ψ_n, quel que soit n.

De même, soit

$$\psi_n = e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}} \Big\} n \text{ fois},$$

on aura une fonction plus croissante en prenant

$$\psi(x) = e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}} \Big\} x \text{ fois ou } \mathrm{E}(x) \text{ fois}$$

[$\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier contenu dans x]; nous allons faire quelque chose d'analogue pour ce cas général.

Remplaçons la suite des fonctions croissantes

$$\psi_1(x),\quad \psi_2(x),\quad \ldots,\quad \psi_n(x),\quad \ldots$$

(1) Cette propriété capitale distingue la numération des fonctions croissantes de celle des nombres entiers : « Étant donnée une suite indéfiniment croissante de nombres entiers, il n'existe pas de nombre réel supérieur à tous les nombres de cette suite. » Cet « axiome d'Archimède » est au fond la base même de la mesure des grandeurs. On voit au contraire qu'étant donnée une échelle quelconque de fonctions croissantes, on peut toujours trouver une fonction de croissance supérieure à toutes les fonctions de la suite.

dont la croissance est de plus en plus rapide, c'est-à-dire telles que

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\psi_n(x)}{\psi_{n-1}(x)} = +\infty,$$

par la suite

$$\varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x),\quad \ldots,$$

composée de fonctions dont chacune est moins rapidement croissante que la suivante, et telles de plus que chaque fonction de la nouvelle suite soit constamment supérieure ou égale à la fonction qu'elle remplace dans la suite proposée.

Pour cela nous prenons

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = \psi_1, \\ &\varphi_2(x) \left\{ \begin{array}{l} \geqq \varphi_1(x) \\ \geqq \psi_2(x) \end{array} \right. \qquad \text{(pour toute valeur de } x\text{)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\varphi_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \geqq \varphi_{n-1}(x), \\ \geqq \psi_n(x). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer qu'on peut trouver une fonction $\psi(x)$ croissant plus vite que chacune des $\varphi_n(x)$ et l'avantage d'avoir les φ_n au lieu des ψ_n est que, pour toute valeur fixe de x, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, $\ldots$ vont en croissant avec n.

Définissons $\psi(x)$ pour x entier par la formule

$$\psi(x) = \varphi_x(x).$$

Dans l'intervalle de deux entiers n et $n+1$, ψ sera supposée égale à $\mathrm{E}(x)$. Je dis que la fonction $\psi(x)$ croît plus vite que toute fonction φ_n.

En effet, il est visible que $\frac{\varphi_x(x)}{\varphi_n(x)}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ par valeurs entières, puisque, pour $x > n+1$,

$$\varphi_x(x) > \varphi_{n+1}(x).$$

Donc

$$\frac{\varphi_x(x)}{\varphi_n(x)} > \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)},$$

et l'on sait que le deuxième membre tend vers l'infini quand x tend vers l'infini, et l'on voit de même que

$$\frac{\varphi_{\mathrm{E}(x)}(x)}{\varphi_n(x)} \geq \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}$$

dès que $x > n+1$; c'est dire que $\frac{\psi(x)}{\varphi_n(x)}$ tend vers $+\infty$ avec x, puisqu'il en est ainsi de $\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}$.

On a ainsi construit une fonction $\psi(x)$ à croissance plus rapide que celle de chacune des fonctions $\psi(x), \ldots, \psi_n(x)$.

Ce lemme démontré, il est facile d'obtenir la proposition annoncée.

Ayant une suite de fonctions positives

$$\varphi_1(n) > \varphi_2(n) > \ldots > \varphi_k(n) > \ldots \text{ avec } \lim_{k=\infty} \varphi_k(n) = 0,$$

quel que soit n, on en déduit la suite de fonctions

$$\frac{1}{\varphi_1(n)} < \frac{1}{\varphi_2(n)} < \ldots < \frac{1}{\varphi_k(n)} < \ldots \text{ avec } \lim_{k=\infty} \frac{1}{\varphi_k(n)} = +\infty.$$

On peut alors déterminer une fonction croissante $\varphi(n)$ telle que

$$\varphi(n) > \frac{1}{\varphi_k(n)},$$

quel que soit k, à partir d'une certaine valeur de n.

C'est un corollaire immédiat du lemme de Paul Dubois-Reymond.

Construisons alors un nombre irrationnel α défini par son développement en fraction continue et tel qu'on ait pour une infinité de nombres rationnels

$$\alpha_n = \frac{p}{q}, \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\varphi(n)},$$

comme $n < q^2$ dans le mode de numérotage adopté pour les nombres rationnels; il suffira qu'on ait

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\varphi(q^2)} = \frac{1}{\psi(q)},$$

ψ étant une fonction croissante convenable de $q\psi(q) = \varphi(q^2)$. Or, on sait que dans tout intervalle pris dans le segment $(0, 1)$ il y a une infinité non dénombrable de points jouissant de cette propriété.

Il est alors facile de voir qu'un tel point α appartient à tous les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$

En effet, puisqu'il existe une infinité de nombres $\alpha_n = \frac{p}{q}$ tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = |\alpha - \alpha_n| < \frac{1}{\varphi(n)},$$

et puisqu'à partir d'une certaine valeur de n on a

$$\frac{1}{\varphi(n)} < \varphi_k(n),$$

quel que soit d'ailleurs la valeur fixe donnée à k, on voit qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles

$$|\alpha - \alpha_n| < \varphi_k(n);$$

or il suffirait qu'il y en eût une seule n_1 telle que

$$|\alpha - \alpha_{n_1}| < \varphi_k(n_1),$$

pour qu'on puisse affirmer que α est intérieur à E_k.

Il est donc prouvé que *l'ensemble* E *des points communs à tous les* $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ *est un ensemble partout dense ayant la puissance du continu.*

Un tel ensemble E sera dit un *ensemble régulier.*

Quelque rapide que soit la décroissance des intervalles d'exclusion $\varphi_k(n)$ servant à définir l'ensemble régulier, cet ensemble contient toujours une infinité non dénombrable de points.

La démonstration que nous venons de faire s'étend au cas où l'on a des points fondamentaux denses dans un plan. Bornons-nous au cas où l'on prend des points fondamentaux α_n à coordonnées rationnelles compris dans le carré de côté 1. On peut les numéroter en sorte que tout indice n corresponde à un couple de nombres rationnels bien déterminé $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right)$ et de sorte que $n < q^4$ ou q'^4, selon que q ou q' est le plus grand des deux nombres q et q'. Il n'y a qu'à les ranger en sorte que la somme $q + q'$ des dénominateurs aille en croissant de la façon suivante :

α_1	coordonnées	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	dénominateurs dont la somme est 4.
α_2	»	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	dénominateurs dont la somme est 5.
α_3	»	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	»
α_4	»	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	»
α_5	»	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	»
α_6	»	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	dénominateurs dont la somme est 6.

On prend des domaines d'exclusion autour de chaque point fondamental α_n, ce seront des carrés à côtés parallèles aux axes, des cercles, des figures régulières ayant leur centre en α_n.

Appelons $A_n^{(k)}$ le domaine relatif au point α_n et dépendant de l'indice k. L'aire $A_n^{(k)}$ tendra vers zéro si k tend vers l'infini. La somme des aires

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

sera finie. Soit E_k l'ensemble des points intérieurs à tous les $A_n^{(k)}$ quand n prend toutes les valeurs entières. La démonstration faite pour le segment $(0, 1)$ prouve que, sur toute parallèle aux axes passant par un point α_n, il y a une infinité non dénombrable de points intérieurs à tous les ensembles E_k et distincts de α_n. L'ensemble E des points communs à tous les E_k a donc la puissance du continu (¹) quelque rapide que soit la décroissance des $A_n^{(k)}$ en fonction de k.

Il nous reste un mot à dire sur la mesure des ensembles régu-

(¹) Ceci a pour conséquence que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z-\alpha_n}$, où $\Sigma |A_n|$ converge aussi rapidement qu'on veut, diverge non seulement aux points α_n, mais en une infinité d'autres points, car quelque rapidement que décroissent les A_n, on peut trouver une infinité non dénombrable de valeurs de z pour lesquelles on a pour une infinité de valeurs de n

$$|z-\alpha_n| < |A_n|.$$

liers E définis précédemment. Posons

$$\sigma_k = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_k(n),$$

on voit de suite que

$$\lim_{k=\infty} \sigma_k = 0$$

En effet on peut choisir m assez grand pour que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \varphi_1(n) < \varepsilon;$$

alors, quel que soit k, on aura

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \varphi_k(n) < \varepsilon;$$

donc on a

$$\sigma_k < \varphi_k(1) + \ldots + \varphi_k(m) + \varepsilon,$$

et l'on peut choisir k assez grand pour que

$$\varphi_k(1) + \ldots + \varphi_k(m) < \varepsilon,$$

puisque

$$\lim_{k=\infty} \varphi_k(n) = 0$$

quel que soit n, c'est dire que pour k assez grand

$$\sigma_k < 2\varepsilon,$$

σ_k est arbitrairement petit. L'ensemble E_k a une mesure qui tend vers zéro. *Donc* E *est de mesure nulle.*

On sait en effet qu'*un ensemble linéaire* E *est dit* de mesure nulle [1] *lorsque, étant donné un nombre arbitrairement petit* ε, *on peut enfermer tous les points de* E *dans des intervalles dont la somme est inférieure à* ε. Pour un ensemble à deux dimensions, la définition est la même : il suffit d'y remplacer le mot *intervalles* par le mot *rectangles;* on peut observer qu'il

(1) Dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, où j'ai donné pour la première fois cette définition, j'emploie l'expression *mesure zéro;* depuis l'expression *mesure nulle*, employée, je crois, pour la première fois par M. Lebesgue, a prévalu.

est équivalent de parler de *carrés* au lieu de *rectangles;* car, étant donné un rectangle, on peut trouver un nombre fini de carrés dont l'aire totale diffère aussi peu qu'on veut de l'aire du rectangle et tels que tout point intérieur au rectangle soit aussi intérieur à l'un de ces carrés. Il est préférable, dans certaines questions, de considérer des carrés au lieu de rectangles; on pourrait aussi remplacer les carrés par des cercles sans altérer la généralité de la définition.

Les ensembles de mesure nulle jouent un rôle très important dans la théorie des fonctions de variables réelles et de variables complexes; il est utile de pouvoir comparer entre eux les divers ensembles de mesure nulle; cette comparaison est facilitée par la notion d'ensemble régulier. Nous allons définir d'abord d'une façon générale les ensembles réguliers et les points fondamentaux de ces ensembles; nous montrerons ensuite que tout ensemble régulier est équivalent à un autre ensemble régulier dont les points fondamentaux sont choisis d'une manière particulière, sont par exemple les points à coordonnées rationnelles.

Un ensemble de mesure nulle est dit *régulier* lorsqu'il peut être défini de la manière suivante :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *une infinité énumérable de points, dits* points fondamentaux; *à chaque nombre entier h faisons correspondre une infinité de carrés* [1] $C_1^{(h)}, C_2^{(h)}, \ldots, C_n^{(h)}, \ldots$ *dont les aires forment une série convergente et tels que le carré $C_n^{(h)}$ renferme à son intérieur $C_n^{(h+1)}$ et tende vers A_n lorsque h augmente indéfiniment. Soit E_h l'ensemble des points intérieurs à l'un des carrés $C_n^{(h)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; l'ensemble des points intérieurs* à *tous les E_h $(h = 1, 2, \ldots)$ est un ensemble régulier* (qui est évidemment de mesure nulle).

Tout ensemble de mesure nulle fait partie d'un ensemble régulier. En d'autres termes, A étant un ensemble quelconque de mesure nulle, on peut définir un ensemble régulier E de mesure

(1) Cette définition est valable pour les ensembles linéaires, car il est équivalent de parler d'intervalles $C_n^{(h)}$ ou de carrés $C_n^{(h)}$ pour de pareils ensembles. Nous nous bornerons dans la démonstration qui va suivre aux ensembles A, à deux dimensions, nos conclusions restant valables pour les ensembles linéaires.

nulle tel que tout point de A appartienne à E. Pour démontrer cette proposition, donnons-nous une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ décroissants et tendant vers zéro, la série $\Sigma\varepsilon_n$ étant supposée convergente. L'ensemble A étant de mesure nulle, nous pouvons définir un ensemble $A^{(h)}$ de carrés (à côtés parallèles aux axes) dont la somme des aires est inférieure à ε_h et tels que tout point de A soit intérieur à l'un des carrés $A^{(h)}$. Nous définirons d'abord les carrés $A^{(1)}$, puis les carrés $A^{(2)}$; s'il y a des portions de ces carrés $A^{(2)}$ qui sont extérieures à tous les carrés $A^{(1)}$, nous pouvons les supprimer comme inutiles; ceci revient à dire que nous ne conservons que les portions des carrés $A^{(2)}$ qui sont intérieures à l'un des carrés $A^{(1)}$; pour procéder d'une manière méthodique et définie d'une manière précise, nous considérons le premier des carrés $A^{(1)}$, soit $A_1^{(1)}$, et nous opérerons successivement sur les portions des carrés successifs $A^{(2)}$ qui sont intérieures à $A_1^{(1)}$; nous continuerons de la même manière avec $A_2^{(1)}$, en ayant soin toutefois de laisser de côté les portions déjà considérées, etc. Chacune de ces opérations nous conduit à considérer des rectangles dont chacun peut être remplacé par une infinité énumérable de carrés (un nombre fini dans des cas particuliers); il suffit, pour former ces carrés suivant une loi déterminée, de construire de proche en proche le plus grand carré possible intérieur au rectangle et dont le sommet le plus rapproché de l'origine des coordonnées O coïncide avec le sommet du rectangle le plus rapproché de O. Si parmi les carrés ainsi définis, il y en a qui ne renferment aucun point de l'ensemble A, nous les supprimerons. Nous pouvons supposer les carrés $A^{(1)}$ rangés par ordre de grandeur décroissante (s'il y en a d'égaux, nous les rangerons d'après les valeurs relatives des abscisses de leurs centres et, si ces abscisses sont égales, d'après les valeurs de leurs ordonnées). Nous rangerons de même les carrés $A^{(2)}$ (après les transformations indiquées), et ainsi de suite.

Nous allons définir un ensemble de carrés $B^{(1)}$, qui comprendra tous les carrés $A^{(1)}$ et en outre un certain nombre des carrés $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, ... De même $B^{(2)}$ comprendra tous les carrés $A^{(2)}$ et en outre un certain nombre des carrés $A^{(3)}$, ... Il est clair que la somme des carrés $B^{(h)}$ est inférieure à

$$\varepsilon_h + \varepsilon_{h+1} + \ldots.$$

Elle est finie quel que soit h et tend vers zéro lorsque h augmente indéfiniment; tous les carrés $A^{(h)}$ faisant partie des $B^{(h)}$, tout point de A est intérieur à l'un des carrés $B^{(h)}$. Pour que l'ensemble E défini par les $B^{(h)}$ soit régulier, il suffit qu'on puisse numéroter les $B^{(h)}$, $B_1^{(h)}$, $B_2^{(h)}$, ..., $B_n^{(h)}$, ..., de telle manière que $B_n^{(h+1)}$ soit intérieur à $B_n^{(h)}$. On arrive à ce résultat de la manière suivante. Prenons d'abord ceux des carrés $A^{(1)}$, s'il en existe, dont l'aire est supérieure à ε_2 (il n'en existe pas dont l'aire est supérieure à ε_1, puisque la somme de tous les $A^{(1)}$ est inférieure à ε_1); nous désignerons ces carrés par $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, ..., $B_{n_2}^{(1)}$. Prenons ensuite ceux des carrés $A^{(1)}$ dont l'aire est supérieure à ε_3, et désignons-les par $B_{n_2+1}^{(1)}$, $B_{n_2+2}^{(1)}$, ..., $B_{p_2}^{(1)}$. Nous allons considérer maintenant les carrés $A^{(2)}$ d'aire supérieure à ε_3; ils sont rangés dans un ordre déterminé, comme il a été dit; si le premier d'entre eux est intérieur à l'un des $A^{(1)}$ déjà numérotés, par exemple à $B_k^{(1)}$, nous le désignerons par $B_k^{(2)}$, sinon, nous le désignerons à la fois par $B_{p_2+1}^{(1)}$ et par $B_{p_2+1}^{(2)}$; de même, si le second des $A^{(2)}$ considérés est intérieur à l'un des $A^{(1)}$ déjà numérotés et distinct de $B_k^{(1)}$, soit $B_h^{(1)}$, nous le désignerons par $B_h^{(2)}$; s'il n'est intérieur à aucun des $A^{(1)}$ (il ne peut pas être intérieur à un $A^{(1)}$ non numéroté, puisque son aire est supérieure à ε_3 et que les $A^{(1)}$ non numérotés ont une aire inférieure à ε_3) ou s'il est intérieur précisément à $B_k^{(1)}$ qui a déjà été utilisé, nous le désignerons à la fois par $B_{p_2+2}^{(1)}$ et par $B_{p_2+2}^{(2)}$, nous arriverons ainsi à définir un certain nombre de nouveaux carrés $B^{(1)}$, soit $B_{p_2+1}^{(1)}$, $B_{p_2+2}^{(1)}$, ..., $B_{n_3}^{(1)}$ et un certain nombre de carrés $B^{(2)}$, qui comprennent tous les A_2 d'aire supérieure à ε_3.

Considérons maintenant les carrés $A^{(1)}$ d'aire supérieure à ε_4; nous les désignons par $B_{n_3+1}^{(1)}$, $B_{n_3+2}^{(1)}$, ..., $B_{p_3}^{(1)}$, nous procéderons de la même manière que précédemment pour les $A^{(2)}$ dont l'aire est supérieure à ε_4, et nous passerons ensuite aux $A^{(3)}$ dont l'aire est supérieure à ε_4; ceux d'entre eux qui seront intérieurs à des $B^{(2)}$ déjà numérotés prendront les mêmes numéros (chaque numéro n'étant donné, bien entendu, qu'une seule fois); les autres seront désignés à la fois par $B_s^{(1)}$, $B_s^{(2)}$, $B_s^{(3)}$. On continuera indéfiniment de la même manière; les ε_k tendant vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, et chaque opération ne portant que sur un nombre fini de carrés, tout carré appartenant à $A^{(h)}$ figurera dans $B^{(h)}$ avec un rang déterminé. De plus, il est évident que $B_q^{(h)}$

tend vers zéro, quel que soit q, lorsque h croît indéfiniment. Il ne pourra pas arriver que certaines suites $B_q^{(1)}, B_q^{(2)}, \ldots, B_q^{(r)}$ s'arrêtent, car cela voudrait dire qu'aucun des carrés $A^{(r+1)}$ n'est intérieur à $B_q^{(r)}$, c'est-à-dire que $B_q^{(r)}$ ne renfermerait aucun point de l'ensemble A, contrairement à nos hypothèses. Les ensembles de carrés $B^{(h)}$ définissent donc bien un ensemble régulier E, qui comprend tous les points de A. Notre théorème est établi.

On peut observer que dans la définition de l'ensemble régulier E il y a certaines suites $B_q^{(1)}, B_q^{(2)}, \ldots,$ dont un certain nombre de premiers termes sont des carrés qui coïncident entre eux; ce n'est pas là une difficulté; on peut néanmoins, si l'on veut, éviter cette singularité en modifiant un peu les définitions des premiers B_q d'une telle série; si $B_q^{(1)}, B_q^{(2)}, B_q^{(3)}$ par exemple coïncident, on remplacera $B_q^{(2)}$ par $(1+\varepsilon_2)\,B_q^{(2)}$ et $B_q^{(1)}$ par $(1+\varepsilon_1)\,(1+\varepsilon_2)\,B_q^{(1)}$ (nous désignons par αC un carré homothétique au carré C par rapport à son centre, avec le rapport d'homothétie α). Ces opérations ont pour résultat de multiplier l'étendue totale des carrés $B^{(h)}$ par un facteur inférieur au produit infini convergent $\Pi(1+\varepsilon_k)$.

On peut observer que l'ensemble régulier E que nous avons défini n'est pas nécessairement le plus simple possible des ensembles réguliers de mesure nulle qui renferment A, mais il importe peu que la démonstration donne *le plus simple;* l'essentiel est de prouver qu'il en existe *un;* il est alors possible de considérer, sans contradiction, l'ensemble de tous les ensembles réguliers de mesure nulle qui contiennent A et l'on peut choisir, dans cet ensemble, sinon le plus simple (qui peut ne pas exister, de même qu'il n'existe pas de *plus petit* nombre rationnel supérieur à $\sqrt{2}$), du moins un ensemble E dont la simplicité est aussi voisine qu'on veut de la simplicité la plus grande possible.

Nous nous occuperons spécialement désormais des ensembles réguliers : un tel ensemble est défini par des points fondamentaux A_n limites de $B_n^{(h)}$ lorsque h augmente indéfiniment et par les grandeurs des carrés d'exclusion $B_n^{(h)}$ attachée à A [1].

Le cas le plus intéressant pour l'étude des ensembles réguliers

---

[1] Il semble qu'il y aurait lieu de considérer aussi les positions relatives de A_n dans ces carrés; mais on peut s'arranger, en modifiant légèrement les définitions, pour que tout $B_n^{(h)}$ ait pour centre le point A_n.

est celui où les A_n sont denses dans une aire (ou sur un segment de droite).

On a vu par un exemple, où les points fondamentaux sont les points de (0, 1) d'abscisse rationnelle, que tout ensemble régulier défini à l'aide de ces points fondamentaux contient une infinité non dénombrable de points quelque rapide que soit la décroissance des carrés $B_n^{(h)}$ en fonction de h. On peut dire en quelque sorte que cette rapidité de décroissance caractérise l'ensemble régulier. Il est, en effet, bien clair que si l'on définit un ensemble régulier ayant mêmes points fondamentaux par des carrés $D_n^{(h)}$ tels que $D_n^{(h)} < B_n^{(h)}$ quels que soient n et h, le nouvel ensemble sera contenu dans l'ancien; il pourra quelquefois lui être identique, c'est ce qu'on voit en prenant, par exemple,

$$D_n^h = B_n^{(h+1)}.$$

On peut donc essayer de classer les ensembles de mesure nulle par la décroissance asymptotique de

$$\varphi_h(n) = \text{mesure de } B_n^{(h)}.$$

Mais il est préférable de considérer, au lieu des fonctions $\varphi_h(n)$, les fonctions $\psi_h(n)$ définies par les relations

$$\sum_{p=n}^{\infty} \text{mesure } B_p^{(h)} = \frac{1}{\psi_h(n)}.$$

La convergence des séries formées par les domaines d'exclusion de rang h entraîne le fait que les fonctions $\psi_h(n)$ croissent indéfiniment avec n.

Or, une démonstration toute pareille à celle que nous avons donnée du théorème de Paul du Bois-Reymond montre qu'étant donnée une suite dénombrable quelconque de fonctions croissantes et tendant vers $+\infty$ avec x

$$\psi_1(x), \quad \ldots, \quad \psi_h(x), \quad \ldots,$$

on peut trouver une fonction $\psi(x)$ croissant moins vite que chacune d'elles, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{\psi_n(x)} = 0,$$

et telle toutefois que

$$\lim_{x=+\infty} \psi(x) = +\infty.$$

Supposons-la déterminée ici, on aura alors quel que soit h, pour n assez grand,

$$\sum_{p=n}^{\infty} \text{mesure } B_p^{(h)} < \frac{1}{\psi(n)},$$

c'est-à-dire que les diverses séries formées par les domaines d'exclusion convergent toutes plus rapidement que la série

$$\sum \left[\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)} \right].$$

Plus la croissance de $\psi(n)$ est rapide, moins l'ensemble de mesure nulle renferme de points, car les domaines d'exclusion décroissent alors plus rapidement. Il est donc naturel de prendre *la fonction* $\psi(n)$ *comme définissant ce qu'on peut appeler « l'ordre asymptotique de l'ensemble régulier de mesure nulle »*. On pourra noter ces ordres au moyen des notations employées pour les ordres d'infinitude (voir *Leçons sur la croissance*).

$\psi(n) = n^p$ sera dit d'*ordre* p, $\psi(n) = e^n$ sera dit d'*ordre* ω,

$$\psi(n) = e^{e^{\cdot^{\cdot^{n}}}} \Big\} p \text{ fois}$$

sera dit d'*ordre* ω^p, etc. Ce sont les ensembles d'ordre ω^2 qui interviennent au dernier Chapitre dans la définition des fonctions monogènes non analytiques.

TRANSFORMATIONS SUR LES ENSEMBLES RÉGULIERS DE MESURE NULLE.

La classification précédente soulève quelques questions.

La plus importante est la suivante :

Cette classification a-t-elle une valeur invariante par certaines transformations? On sait quel rôle la notion d'invariant joue dans les mathématiques modernes. On peut donc se demander si l'on établit une correspondance biunivoque entre un ensemble régulier de mesure nulle A et un ensemble B, autrement dit, si l'on

transforme A dans B, quelle valeur gardera la classification dans laquelle entre A. C'est là une question plus délicate qu'on pouvait tout d'abord le croire.

Bornons-nous aux ensembles linéaires sur un segment (o, 1). Chaque point de A peut être fixé par son abscisse x, chaque point de B par son abscisse y $\begin{pmatrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{pmatrix}$, il est possible d'établir entre x et y une correspondance telle que l'ensemble B correspondant à A ne soit plus de mesure nulle. En effet, A, ensemble régulier, a toujours la puissance du continu; on peut donc établir entre ses points et ceux du segment (o, 1) une correspondance biunivoque, correspondance qui transforme A en un ensemble de mesure égale à *un*.

Il est bien certain que si l'on fait correspondre y à x par une relation

$$y = f(x),$$

la fonction croissante f ayant une dérivée pour toute valeur de x dans l'intervalle (o, 1) $(0 \leqq x \leqq 1)$, l'ensemble des B aura une mesure nulle. Il suffit, pour s'en convaincre, d'écrire

$$dy = f'(x)\,dx$$

et d'observer que

$$\int_{b_0}^{b_1} dy = f'(\xi) \int_{x_0}^{x_1} dx \, [x_0 < \xi < x_1];$$

$f'(\xi)$ est, quel que soit ξ dans (o, 1), bornée

$$|f'(\xi)| < M,$$

cela résulte de l'existence de $f'(x)$ dans *l'intervalle fermé* (o, 1). Si l'ensemble des points A peut être enfermé (et c'est l'hypothèse) dans une infinité dénombrable de segments dont la longueur totale est $< \varepsilon$, l'ensemble des B pourra l'être dans une infinité de segments correspondant aux précédents dont la longueur totale sera $< M\varepsilon$, c'est-à-dire sera arbitrairement petite avec ε.

Le raisonnement précédent n'est plus valable si l'on suppose simplement que f est une fonction continue, croissante, sans dérivée.

Un problème intéressant serait de déterminer toutes les trans-

formations qui, à un ensemble de mesure nulle, font correspondre un ensemble de mesure nulle.

Nous allons étudier actuellement certaines de ces transformations. Nous nous bornerons au cas où les points fondamentaux de l'ensemble régulier donné sont partout denses, sur un segment ou dans une aire. Nous ferons d'abord l'étude des ensembles linéaires qui est notablement plus simple que celle des ensembles à plusieurs dimensions.

Transformations sur les ensembles linéaires. — Nous étudierons, les points fondamentaux étant denses partout sur le segment $(0, 1)$, des transformations sur ces points fondamentaux qui les transforment en points denses partout sur un nouveau segment $(0, 1)$, puis nous étendrons par continuité la transformation à tous les points du segment $(0,1)$.

Les correspondances continues entre ensembles dénombrables denses :

Théorème. — *Étant donnés deux ensembles dénombrables* A, B, *denses tous deux sur un segment* $(0,1)$, *on peut, quel que soit le nombre donné* $\varepsilon < 1$, *les numéroter de telle sorte que, à deux points* A_n, A_p *quelconques du premier, il corresponde des points* $B_n B_p$ *du deuxième tels que les vecteurs* $\overrightarrow{A_n A_p}$ *et* $\overrightarrow{B_n B_p}$ *aient même sens par rapport au vecteur* $\overrightarrow{0,1}$ *et soient tels en outre que*

$$1 - \varepsilon < \frac{\overrightarrow{A_n A_p}}{\overrightarrow{B_n B_p}} < 1 + \varepsilon,$$

ε est supposé donné, et l'on détermine alors un numérotage satisfaisant aux conditions précédentes. L'essentiel n'est pas d'ailleurs que ε soit arbitrairement petit; c'est surtout que les deux nombres positifs entre lesquels reste compris $\frac{\overrightarrow{A_n A_p}}{\overrightarrow{B_n B_p}}$ soient finis, car on a vu que, par une transformation qui, à un point A d'abscisse x, fait correspondre un point B d'abscisse $y = f(x)$ [$f(x)$ ayant une

dérivée positive et finie en tout point de $(0, 1)$], le rapport $\frac{\overrightarrow{A_m A_p}}{\overrightarrow{B_m B_p}}$ de deux segments correspondants reste toujours compris entre deux nombres positifs fixes.

Soient $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ un numérotage donné *a priori* pour les points des deux ensembles; $b_1, \ldots, b_n, \ldots$, A et B.

Nous allons opérer successivement sur le premier point de A, puis sur le premier de B, puis sur le deuxième de A, puis sur le deuxième de B, etc.; de cette manière, nous ne laisserons échapper aucun point appartenant à l'un des deux ensembles; à chaque point nouveau que nous considérerons dans l'un des ensembles, nous ferons correspondre un point déterminé de l'autre ensemble; lorsque le tour de ce nouveau point viendrait, il sera omis.

Donnons-nous une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, tous < 1 tels qu'on ait

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n) < 1+\varepsilon$$

et

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)} > 1-\varepsilon,$$

ce qui exige

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n) < \frac{1}{1-\varepsilon},$$

condition qui est toujours vérifiée si la première l'est.

Soit a_1 le premier point de A, appelons-le A_1. Choisissons le point b_{m_1} de B dont l'indice provisoire soit le moins élevé possible et tel qu'on ait

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{\overrightarrow{O a_1}}{\overrightarrow{O' b_{m_1}}} < 1+\varepsilon_1$$

ainsi que

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{\overrightarrow{a_1 u}}{\overrightarrow{b_{m_1} u'}} < 1+\varepsilon_1,$$

u et u' désignant les points d'abscisse 1 sur les deux segments qui portent A et B, O et O' les points d'abscisse zéro ([1]).

Les deux premières inégalités déterminent, a_1 étant connu, un segment à l'intérieur duquel il faudra choisir $b_{m'_1}$, ce segment renferme le point d'abscisse égale à Oa_1; les deux dernières inégalités déterminent aussi un segment qui a avec le précédent une partie commune renfermant le point d'abscisse égale à Oa_1; cette partie commune renferme une infinité de points de B (B étant partout dense); parmi eux nous choisissons celui d'indice le moins élevé $b_{m'_1}$ et nous l'appelons B_1.

Ceci fait, choisissons dans B, débarrassé de B_1, le point qui, dans le numérotage provisoire, a le plus petit indice; ce sera b_1 si $m'_1 \neq 1$, ce sera b_2 si $m'_1 = 1$. Ce point est dans l'un des deux segments en lesquels B_1 partage $O'u'$, soit par exemple sur $B_1 u'$; appelons-le B_2; choisissons dans l'ensemble A débarrassé de A_1 le point a_{m_2} de plus petit indice situé dans la région $A_1 u$ tel que

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\overrightarrow{A_1 a_{m_2}}}{\overrightarrow{B_1 B_2}} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2),$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\overrightarrow{a_{m_2} u}}{\overrightarrow{B_2 u'}} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2).$$

Un raisonnement tout pareil à celui fait précédemment prouve que le point a_{m_2} existe et est bien déterminé. Je l'appelle A_2. Si B_2 avait été dans $O'B_1$, il aurait suffi d'envisager OA_1 et $O'B_1$ au lieu de $A_1 u$ et $B_2 u'$, mais les raisonnements auraient été identiquement les mêmes ([2]).

([1]) Si le point O fait partie de A, nous supposerons que O' fait partie de B et nous faisons correspondre O et O' en les appelant par exemple A_1 et B_1 avant de commencer. De même, pour u et u'. Ceci fait, nous pouvons supposer avoir affaire à des ensembles A et B ne contenant ni O ni u.

([2]) Pour ce qui est de l'existence de a_{m_2}, insistons un peu. On a deux segments $A_1 u$ et $B_1 u'$ tels que

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{A_1 u}{B_1 u'} < 1+\varepsilon_1.$$

Prenons B_2 et soit a' le point de $A_1 u$ tel que

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{A_1 a'}{B_1 B_2} = \frac{A_1 u}{B_1 u'} = \frac{a' u}{B_2 u'} < 1+\varepsilon_1.$$

On continuera en prenant le point qui, dans l'ensemble A débarrassé de A_1 et A_2, a le plus petit indice; on l'appellera A_3; il est dans un des trois intervalles OA_1, A_1A_2, A_2u. Soit par exemple dans A_1A_2. On choisira alors dans l'ensemble des points de B débarrassé de B_1 et B_2, qui sont entre B_1 et B_2, le point $b_{m'_3}$ de plus petit indice et tel que

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)} < \frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{B_1b_{m'_3}}} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3),$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)} < \frac{\overrightarrow{A_3A_2}}{\overrightarrow{b_{m'_3}B_2}} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3);$$

on appellera B_3 ce point et l'on continuera en prenant alternativement un point dans A et dans B, et lui faisant correspondre un point de B ou de A.

Après n opérations on aura sur chaque droite des segments en nombre $n+1$, le rapport de deux segments homologues sur A et B étant compris entre

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\dots(1+\varepsilon_n)} \quad \text{et} \quad (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\dots(1+\varepsilon_n),$$

et *a fortiori* toujours entre

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \quad \text{et} \quad (1+\varepsilon).$$

Les points de A_1u tels que

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\overrightarrow{A_1a_{m_2}}}{\overrightarrow{B_1B_2}} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$$

sont évidemment sur un segment qui contient a' à son intérieur. Il en est de même de ceux pour lesquels on a

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\overrightarrow{a_{m_2}u}}{\overrightarrow{B_2u'}} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2).$$

Ces deux segments renfermant a' ont une partie commune sur laquelle on choisira A_2.

En continuant indéfiniment, tout point de A et tout point de B sera numéroté après un nombre fini d'opérations, et aura dans le nouveau classement un rang au plus égal à celui qu'il avait dans le classement primitif. Notre numérotage satisfait bien aux conditions requises, car si l'on considère deux points quelconques de A, ils auront certains indices A_n, A_p dans le nouveau classement; considérons les points correspondants B_n, B_p de B. La longueur $A_n A_p$ est la somme de certains intervalles obtenus dans la division opérée pour faire le classement, $B_n B_p$ est la somme d'intervalles correspondants. Deux intervalles correspondants quelconques ayant un rapport compris entre $\frac{1}{1+\varepsilon}$ et $1+\varepsilon$, il en sera de même de leur somme, c'est-à-dire qu'on aura, quels que soient n et p,

$$1-\varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{\overrightarrow{A_n A_p}}{\overrightarrow{B_n B_p}} < 1+\varepsilon.$$

De la correspondance précédente entre les points de A et de B, on déduit une correspondance continue entre les points des deux segments $(0, 1)$ qui portent A et B, et respectant les positions relatives des points qu'elle fait correspondre.

Soit, en effet, α un point quelconque, n'appartenant pas à A, pris sur le segment $(0,1)$ qui porte A. On peut trouver une infinité de suites de points de A tendant vers α, soit $A_{m_1} A_{m_2} \ldots A_{m_k} \ldots$ une de ces suites. Quel que soit η donné à l'avance, on aura, pour k et $k' > k_0$,

$$\text{Longueur } A_{m_k} A_{m_{k'}} < \eta,$$

soient B_{m_1}, B_{m_2}, ..., B_{m_k}, ... les points de B correspondants. A cause de

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{\overrightarrow{B_n B_p}}{\overrightarrow{A_n A_p}} < 1+\varepsilon,$$

on voit que, pour k et $k' > k'_0$, on aura aussi

$$\text{Longueur } B_{m_k} B_{m_{k'}} < \eta'.$$

Donc les B_{m_k} tendent vers une position-limite β.

Cette limite β est indépendante de la suite des A_{m_k} choisie,

A tendant vers α. Car pour deux suites

$$A_{m_1},\ \ldots,\ A_{m_k},\ \ldots,$$
$$A_{m'_1},\ \ldots,\ A_{m'_k},\ \ldots$$

tendant vers α, on peut, étant donné η, trouver k_0 tel que, pour $k > k_0$,

$$\text{Longueur } \overline{A_{m'_k} A_{m_k}} < \eta,$$

d'où l'on déduit que les deux suites

$$B_{m_1},\ \ldots,\ B_{m_k},\ \ldots,$$
$$B_{m'_1},\ \ldots,\ B_{m'_k},\ \ldots$$

tendront vers la même limite β.

La correspondance est bicontinue, c'est-à-dire soient α et α' tels que

$$\overline{\alpha\alpha'} < \eta \quad (^1),$$

il y correspondra deux points $\beta\beta'$ tels que

$$\overline{\beta\beta'} < \eta_1,$$

η_1 étant arbitrairement petit à condition que η soit assez petit et réciproquement.

Il suffit pour cela de considérer deux suites de points prises dans A et B et définissant $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, soient

$$A_{m_1},\ \ldots,\ A_{m_k},\ \ldots \quad \text{définissant } \alpha,$$
$$A_{m'_1},\ \ldots,\ A_{m'_k},\ \ldots \quad \text{»} \quad \alpha';$$

$$B_{m_1},\ \ldots,\ B_{m_k},\ \ldots \quad \text{définissant } \beta,$$
$$B_{m'_1},\ \ldots,\ B_{m'_k},\ \ldots \quad \text{»} \quad \beta'.$$

Si $\overline{\alpha\alpha'} < \eta$, on peut trouver k_0 tel que, pour $k > k_0$, on ait

$$\overline{A_{m_k} A_{m'_k}} < 2\eta.$$

On aura alors

$$\overline{B_{m_k} B_{m'_k}} < 2\eta(1+\varepsilon)$$

pour $k > k_0$ et B_{m_k}, $B_{m'k}$ tendant vers β et β' lorsque k tend vers

(1) $\overline{\alpha\alpha'}$ désigne pour abréger « longueur $\alpha\alpha'$ ».

l'infini, on peut trouver k'_0 tel que

$$\overline{\beta\beta'} < 2\overline{B_{m_k}B_{m'_k}} \quad \text{pour} \quad k > k'_0.$$

Donc pour $k > \begin{cases} k_0 \\ k'_0 \end{cases}$

$$\overline{\beta\beta'} < 4\eta(1+\varepsilon) = \eta_1,$$

η_1 étant infiniment petit avec η.

De plus, la correspondance précédente conserve les relations de situation, c'est-à-dire qu'à tout point d'abscisse x du segment $(0,1)$ qui porte A, elle fait correspondre un point d'abscisse y du segment $(0,1)$ qui porte B, *la fonction* $y = f(x)$ *étant une fonction continue croissante de* x. A deux points α, α' d'abscisse $x_1 x_2$ elle en fait correspondre deux β, β' d'abscisse $y_1 y_2$, je dis que $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ qui est positif reste compris entre deux limites fixes. En effet, envisageons les deux suites définissant α, α' et les suites correspondantes définissant β et β', on aura pour $k > k_0$

$$|x_1 - x_2| = \overline{A_{m_k}A_{m'_k}} + \eta_k,$$
$$|y_1 - y_2| = \overline{B_{m_k}B_{m'_k}} + \eta'_k,$$

$|\eta_k|$ et $|\eta'_k|$ étant $< \eta$ arbitrairement petit.

Donc

$$\frac{\overline{B_{m_k}B_{m'_k}} - \eta}{\overline{A_{m_k}A_{m'_k}} + \eta} < \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < \frac{\overline{B_{m_k}B_{m'_k}} + \eta}{\overline{A_{m_k}A_{m'_k}} - \eta}.$$

Or

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{\overline{B_{m_k}B_{m'_k}}}{\overline{A_{m_k}A_{m'_k}}} < +\varepsilon,$$

et η est arbitrairement petit. On voit alors de suite que

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < 1 + \varepsilon,$$

la fonction $y(x)$ est à nombres dérivés bornés.

La transformation ainsi réalisée transforme un ensemble régulier de mesure nulle à points fondamentaux partout denses en un ensemble de même type.

En effet, soit A l'ensemble des points fondamentaux du premier ensemble sur $(0, 1)$, B un ensemble dénombrable quelconque partout dense pris sur $(0, 1)$.

On pourra prendre pour B l'ensemble des points d'abscisse rationnelle, par exemple; entre A et B on établira la correspondance précédente, qu'on étendra aux deux segments $(0, 1)$; à l'intervalle d'exclusion $A_n^{(h)}$ correspondra un intervalle $B_n^{(h)}$ entourant le point B_n et l'on aura

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{\text{mesure } A_n^{(h)}}{\text{mesure } B_n^{(h)}} < 1+\varepsilon.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \text{mesure } B_n^{(h)} < \left[\sum_{n=1}^{n=\infty} \text{mesure } A_n^{(h)}\right](1+\varepsilon).$$

Donc :

1° Les intervalles d'exclusion $B_n^{(h)}$ forment une série convergente quel que soit h;

2° $A_n^{(h)}$ contenant $A_n^{(h+1)}$, à cause des propriétés de notre correspondance $B_n^{(h)}$, contiendra $B_n^{(h+1)}$;

3° Si h tend vers l'infini $A_n^{(h)}$ tend vers A_n, donc $B_n^{(h)}$ tend vers B_n. On définit ainsi avec B un ensemble régulier de mesure nulle qui correspond point par point à l'ensemble proposé.

Or, nous avons démontré que tout ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont à coordonnées rationnelles a la puissance du continu [1]. Nous voyons donc ici que *tout ensemble régulier linéaire de mesure nulle, dont les points fondamentaux sont denses sur un segment, a la puissance du continu.*

Les correspondances continues entre ensembles dénom-

---

[1] Si $A_n^{(h)}$ a son centre en A_n, $B_n^{(h)}$ n'aura pas en général son centre en B_n, mais ceci n'a aucune importance dans la définition de l'ensemble régulier. D'ailleurs il n'y aurait qu'à prendre au lieu de $B_n^{(h)}$ le plus grand intervalle $B_n'^{(h)}$ de centre B_n qui est contenu dans $B_n^{(h)}$. L'ensemble défini par les $B_n^{(h)}$ aurait plus de points que l'ensemble défini par les $B_n'^{(h)}$; donc aurait *a fortiori* la puissance du continu.

brables denses dans une aire. — Soient deux ensembles dénombrables de points $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ denses, le premier dans une aire limitée par un contour Γ, le deuxième dans une aire limitée par Γ'; ces aires seront supposées d'un seul tenant et limitées par un seul contour d'une nature très simple, par exemple un contour dont on sache faire la représentation sur un cercle par une fonction monogène régulière dans l'aire et sur le contour. Si les points de $\mathcal{A}$ sont denses sur la courbe Γ, on supposera qu'il en est de même des points de $\mathcal{B}$ relativement à la courbe Γ'. Si Γ ne renferme qu'un nombre fini de points (qui peut être zéro) de $\mathcal{A}$, Γ' sera supposé renfermer un nombre égal de points de $\mathcal{B}$.

Cela étant, la représentation conforme fait correspondre aux points de $\mathcal{A}$ un ensemble de points dense dans un cercle C, et de même aux points de $\mathcal{B}$ un ensemble de points dense dans un cercle C′ qu'on peut supposer égal à C. On peut s'arranger pour que les centres de C, C′ ne soient pas des points des ensembles transformés de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Je dis de plus qu'on peut faire la représentation de telle sorte que *sur tout rayon issu du centre de* C *ne se trouve qu'un point de l'ensemble transformé de* $\mathcal{A}$ (j'appelle A cet ensemble transformé).

Il suffit pour cela de montrer que, étant donné un ensemble dénombrable A, dense dans un cercle C, on peut représenter C sur un cercle C_1 de sorte que l'ensemble transformé présente la propriété signalée.

Or, considérons tous les cercles passant par deux points de l'ensemble A et orthogonaux au cercle C. Ces cercles forment un ensemble dénombrable de courbes, et par suite on peut trouver un point ω intérieur à C n'appartenant à aucun de ces cercles. Soit ω' l'inverse de ce point par rapport au cercle C; ω' n'est sur aucun des cercles précédents qui tous sont orthogonaux à C. Une inversion quelconque de pôle ω' transforme le cercle C en un cercle C_1 ayant pour centre le point ω_1 inverse de ω; tout rayon issu de ω_1 est l'inverse d'un cercle passant par $\omega\omega'$. Or, sur tout cercle passant par $\omega\omega'$ (donc orthogonal à C) et par un point quelconque de A, il n'y a que ce point de A; car si cela n'était pas, ω et ω' seraient sur un cercle orthogonal à C passant

par deux points de A; donc, sur tout rayon issu de ω_1, il y a un point au plus de l'ensemble transformé de A. L'inversion précédente est une transformation conforme satisfaisante. Nous transformons de même C′ en C'_1 égal à C_1 (c'est possible, car la puissance d'inversion demeure arbitraire) de façon que l'ensemble B se transforme en un ensemble ayant la propriété précédente : sur tout rayon de C'_1 se trouve un point au plus de cet ensemble transformé.

Ces préliminaires étant posés, nous sommes en présence de deux ensembles dénombrables A, B, denses dans deux cercles égaux, C et C′ (et simultanément denses ou non sur leurs circonférences), et tels que sur tout rayon de C ou C′ se trouve un point au plus de A ou B; montrons qu'on peut *numéroter les points de* A *et les points de* B, *de telle sorte qu'à un point du contour* C *corresponde un point du contour* C′ (si A et B sont denses sur C et C′, ce que nous supposerons à l'avenir, car le cas où ni l'un ni l'autre des ensembles A et B n'aurait de points sur la circonférence se traiterait de la même manière) *et qu'on ait, quels que soient p et q,*

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\overline{A_p A_q}}{\overline{B_p B_q}} < \alpha,$$

α étant un nombre positif fixe > 1.

Choisissons d'abord des axes rectangulaires issus de O centre de C, tels que sur toute parallèle aux axes il n'y ait qu'un point de l'ensemble A au plus. C'est possible, en effet :

1° Les droites joignant O à tous les points de l'ensemble A, ainsi que les perpendiculaires à toutes ces droites menées par O, forment un ensemble dénombrable comme A lui-même.

2° Les droites joignant de toutes les façons possibles deux points de l'ensemble A et, par suite, les parallèles à ces droites issues de O forment également un ensemble dénombrable. Il en est de même des perpendiculaires menées par O aux dernières droites envisagées.

3° Les droites joignant O aux milieux de tous les segments $a_i a_k$ joignant deux points de A et leurs perpendiculaires issues de O forment aussi un ensemble dénombrable.

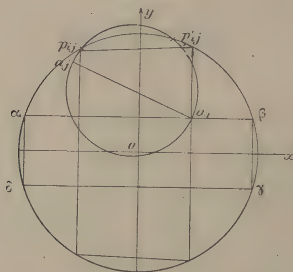
On peut donc trouver un couple de droites rectangulaires Ox,

Oy, issues de O, telle que : (a) il n'y ait aucun point de A sur chacune d'elles ; (b) toute droite joignant deux points de A ne soit parallèle ni à Ox, ni à Oy ; ceci exprime que sur toute parallèle à Ox ou à Oy, il n'y a qu'un point au plus de l'ensemble A ; (c) telles qu'aucune de ces deux droites Ox, Oy ne passe à égale distance de deux points de A. Il suffit de choisir pour Ox, une des droites issues de O, en infinité non dénombrable, distinctes des droites citées aux 1°, 2°, 3° qui forment un ensemble dénombrable.

4° Nous pouvons même imposer d'autres conditions à Ox, Oy ; la suivante nous sera très utile :

Considérons un point a_i de l'ensemble A et considérons les deux rectangles inscrits dans le cercle C passant par A (*fig.* 6) et

Fig. 6.



ayant leurs côtés parallèles aux axes. On peut supposer Ox, Oy tels que sur le périmètre de chacun de ces rectangles il n'y ait aucun point de l'ensemble A autre que a_i. En effet, un tel point de A différent de a_i ne peut se rencontrer que sur les côtés du rectangle αβγδ perpendiculaires à αβ ; αβ contenant a. Cela résulte de l'hypothèse (c) que Ox ne passe pas à égale distance de deux points de A, ainsi que Oy. Considérons alors de toutes les façons possibles deux points a_i, a_j de A et sur le segment qui les joint comme diamètre décrivons un cercle. Nous avons une infinité dénombrable de cercles, leurs points d'intersection p_{ij} et p'_{ij} avec le cercle C forment un ensemble dénombrable. Par l'origine, menons les parallèles à toutes les directions telles que $a_i p_{ij}$, $a_i p'_{ij}$,

et leurs perpendiculaires, on a ainsi un ensemble dénombrable de droites issues de O; comme les droites jouissant des propriétés 1°, 2°, 3° forment aussi un ensemble dénombrable, on voit qu'il sera possible, et d'une infinité de façons, de choisir deux axes rectangulaires Ox, Oy tels que, outre les propriétés (a), (b), (c), ce couple d'axes ne soit parallèle à aucune des directions $a_i p_{ij}$, $a_i p'_{ij}$, $a_j p_{ij}$, $a_j p'_{ij}$. Cette dernière propriété signifie évidemment que si par deux points $a_i a_j$ de A, on mène des parallèles aux axes et qu'on prenne les deux sommets autres que $a_i a_j$ du rectangle formé, ces deux points ne sont jamais situés sur C, et ceci équivaut à la propriété que nous avons voulu imposer au 4°, à savoir que, sur le périmètre de tout rectangle tel que $\alpha\beta\gamma\delta$ parallèle aux axes, inscrit dans C, et passant par un point a_i de A, il n'y a pas d'autre point de l'ensemble A que a_i.

Supposons donc Ox, Oy ainsi choisis.

Nous ferons de même pour l'ensemble B. Nous choisirons deux axes rectangulaires $O'x'$, $O'y'$ issus du centre O' de C', sur lesquels ne se trouve aucun point de B, enfin tels que sur le périmètre de tout rectangle inscrit dans C' ayant ses côtés parallèles à $O'x'$, $O'y'$, il n'y ait qu'un point au plus appartenant à B'.

Nous supposons les points de A et B déjà classés dans un ordre provisoire, et nous allons montrer qu'on peut modifier le numérotage de façon à réaliser les propriétés indiquées par l'énoncé.

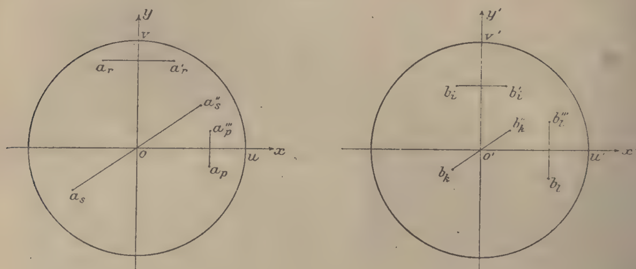
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les points de A; $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ceux de B.

Faisons la transformation suivante sur A. Nous conservons les points a_u de A situés dans le premier quadrant de l'angle des deux axes Ox, Oy. Remplaçons tout point a_r de A situé dans le deuxième quadrant par son symétrique relativement à Oy, que nous appellerons a'_r, l'accent $'$ servant à reconnaître que a'_r est l'homologue d'un point du deuxième quadrant. De même, tout point a_s situé dans le troisième quadrant sera remplacé par son symétrique a''_s par rapport à O, et tout point a_p du quatrième quadrant sera remplacé par son symétrique a'''_p par rapport à Ox.

Nous ferons de même pour B, l'accent $'$ désignant l'homologue dans le premier quadrant d'un point du deuxième quadrant, l'accent $''$ celui d'un point du troisième, l'accent $'''$ celui d'un point du quatrième quadrant.

Il est d'abord bien clair que les points a'_r sont distincts des points a_n du premier quadrant, puisque sur toute parallèle à Ox, il n'y a qu'un point de A, et un point a'_r ne pourrait coïncider avec un point a_n que si le point a_r de A dont a'_r est l'homologue et le

Fig. 7.



point a_n précédent étaient situés sur une même parallèle à Ox. On voit de même que les a'''_p sont distincts des a_n.

Inutile de dire que les a'_r sont distincts entre eux, ainsi que les a'''_p. Un point a'_r ne pourrait coïncider avec un a'''_p que si les points a_r et a_p dont ils sont les homologues étaient symétriques par rapport à O, et ceci est impossible, puisque sur tout rayon de O, il y a un point au plus de C. Donc les a'_r sont distincts des a'''_p.

Les a''_s sont visiblement distincts des a_n, puisque a_s et a_n ne peuvent jamais être sur un même rayon. Les a''_s sont aussi distincts des a'_r, car si a''_s coïncidait avec a'_r, a_s et a_r seraient symétriques par rapport à Ox, et c'est impossible. De même, les a''_s sont distincts des a'''_p, et ils sont visiblement distincts entre eux.

En définitive, nous avons dans le premier quadrant un ensemble A' formé des a_n de A situés dans ce quadrant, ainsi que des a'_r, des a''_s, des a'''_p, dont tous les points sont distincts, ensemble A' qui correspond point par point à A, dont il est en quelque sorte une image. Mêmes conclusions pour B et l'ensemble image B' que nous lui substituons.

Remarquons que l'ensemble A', comme A, est tel que sur toute parallèle à Ox ou à Oy il y a au plus un point de A'. En effet, cela est clair pour les a_n de A'; un point a_n ne peut être situé sur la parallèle à Ox menée par un a'_r, nous l'avons déjà vu, et il en

est de même d'un point a''_s et d'un a'''_p, puisque ni $a_n a_r$, ni $a_s a_p$ ne peuvent être parallèles à Ox. Il en est de même pour les parallèles à Oy, à cause de la restriction imposée à Ox et à Oy de ne jamais passer à égale distance de deux points de l'ensemble A.

En définitive, A' est un ensemble dense dans le premier quadrant du cercle C et sur le quart de cercle qui limite ce quadrant; A' n'a aucun point sur Ox et Oy; sur toute parallèle à Ox ou à Oy il y a un point au plus de l'ensemble A'; B' a les mêmes propriétés. A' est formé de quatre sortes de points, les a, les a', les a'', les a'''. Les a sont rangés par ordre d'indices croissants; de même les a', les a'', les a'''; un indice déterminé de la suite 1, 2, ..., n, ... n'appartient qu'à l'une des quatre espèces a, a', a'', a'''. Chaque espèce comprend des points denses dans tout le quart de cercle. Remarquons enfin que si par chaque point de A' on mène les parallèles aux axes, aucun sommet du quadrillage ainsi formé ne se trouve sur C, à cause de la dernière restriction imposée aux axes Ox, Oy.

Mêmes remarques pour B'.

Ces préliminaires étant posés, considérons les deux ensembles A' et B'.

Donnons-nous une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, tels que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n) < 1+\varepsilon,$$

ε étant un nombre positif < 1, ce qui entraîne

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)} > \frac{1}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon.$$

Choisissons alors dans A' le point de plus petit indice : d'indice 1; c'est par exemple a'_1, appelons-le A'_1. Si A'_1 est sur le quart de cercle qui limite A', nous lui ferons correspondre le point b' de plus petit indice situé sur le quart de cercle qui limite B' tel qu'on ait

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{\operatorname{arc} u\,a'_1}{\operatorname{arc} u'\,b'} < 1+\varepsilon_1$$

et

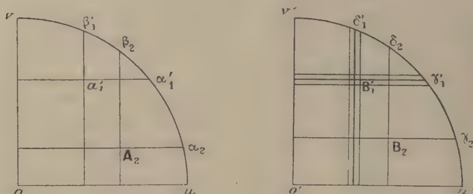
$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{\operatorname{arc} a'_1 v}{\operatorname{arc} b' v'} < 1+\varepsilon_1.$$

On voit que ceci est possible d'après l'étude faite pour les ensembles linéaires, puisque les b' sont partout denses dans a et sur le quart de cercle.

Si le point de A′ de plus bas indice avait été a''_1, on lui aurait fait correspondre un point b''.

De toute façon, le point b' qui correspond ainsi à a'_1 sera désigné par B'_1. Examinons le cas où a'_1 ne serait pas sur le quart de cercle. Alors en menant par a'_1 les parallèles aux axes, ces parallèles

Fig. 8.



rencontrent le quart de cercle en deux points α'_1, β'_1 que nous dirons correspondre à a'_1 sur le quart de cercle A′ (*fig.* 8). Les points γ' du quart de cercle relatif à B′, tel qu'on ait

$$(1) \qquad \frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{\operatorname{arc} \gamma' u'}{\operatorname{arc} \alpha'_1 u} < 1+\varepsilon_1,$$

sont situés sur un arc fini du quart de cercle B′.

Il en est de même des points δ' pour lesquels

$$(2) \qquad \frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{\operatorname{arc} \delta' v'}{\operatorname{arc} \beta'_1 v} < 1+\varepsilon_1.$$

Donc un point b' de B′, tel qu'en menant par ce point les parallèles aux axes qui rencontrent le quart de cercle en $\gamma'\delta'$, les points γ' et δ' vérifiant les inégalités (1) et (2), sera compris dans un rectangle à côtés parallèles aux axes (rectangle ayant à son intérieur le point qui par rapport à Ou', Ov' a les mêmes coordonnées que a'_1, par rapport à Ou, Ov). Choisissons dans ce rectangle le point b' de

plus petit indice tel qu'on ait

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{\operatorname{arc}\gamma'_1\delta'_1}{\operatorname{arc}\alpha'_1\beta'_1} < 1+\varepsilon_1,$$

ce qui visiblement est possible, et appelons B'_1 ce point, nous le ferons correspondre à A'_1.

Par A'_1 et B'_1 menons les parallèles aux axes qui rencontrent les quarts de cercle respectifs à $\alpha'_1\beta'_1$, $\gamma'_1\delta'_1$.

Dans l'ensemble B' débarrassé du point B'_1, choisissons le point de plus petit indice; si B'_1 était le point b'_1, on choisira le point de B' d'indice 2, sinon on prendra le point de B' d'indice 1; ce point appartient soit aux b, soit aux b', aux b'' ou aux b'''; je l'appellerai B_2 s'il appartient aux b, B'_2 s'il appartient aux b', etc. Je suppose par exemple que ce point soit B_2.

Par B_2 menons les parallèles aux axes qui rencontrent le quart de cercle en $\gamma_2\delta_2$; $\gamma_2\delta_2$ se trouveront sur certains des trois arcs $u'\gamma'_1$, $\gamma'_1\delta'_1$, $\delta'_1 v'$ (ils peuvent être situés sur le même arc).

1° Supposons qu'ils ne soient pas sur le même arc, par exemple γ_2 sur $u'\gamma'_1$, et δ_2 sur $\gamma'_1\delta'_1$. En vertu de la relation

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{\operatorname{arc}u'\gamma'_1}{\operatorname{arc}u\alpha'_1} < 1+\varepsilon_1$$

et ainsi qu'on l'a vu pour les ensembles linéaires, les points α de l'arc $u\alpha'_1$, tels que

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\operatorname{arc}u\alpha}{\operatorname{arc}u'\gamma_2} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2),$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\operatorname{arc}\alpha\alpha'_1}{\operatorname{arc}\gamma_2\gamma'_1} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$$

sont compris sur un arc fini de $u\alpha'_1$. Il en est de même des points β de l'arc $\alpha'_1\beta'_1$ pour lesquels

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\operatorname{arc}\alpha'_1\beta}{\operatorname{arc}\gamma'_1\delta_2} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2),$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\operatorname{arc}\beta\beta'_1}{\operatorname{arc}\delta_2\delta'_1} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2).$$

On en conclut que les points a de A' pour lesquels les α et β correspondants du quart de cercle satisfont aux relations précédentes sont compris dans un rectangle ayant ses côtés parallèles

aux axes. Nous choisissons le point a de plus petit indice de ce rectangle; nous l'appellerons A_2 et nous le ferons correspondre à B_2.

2° Supposons que $\gamma_2 \delta_2$ soient sur un même arc, par exemple sur $u'\gamma'_1$. Les mêmes considérations que précédemment prouvent que α et β devront se trouver sur deux arcs finis compris dans $u\alpha'_1$; il n'y a qu'à remplacer pour β les points α'_1, β'_1 par $u\alpha'_1$ et pour δ_2 les points γ'_1, δ'_1 par $u'\gamma'_1$.

De plus, alors, dans le rectangle à l'intérieur duquel devra se trouver a, nous choisirons le point a de plus petit indice tel qu'on ait, outre des relations tout à fait analogues à celles du premier cas, l'inégalité

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\text{arc}\,\alpha\beta}{\text{arc}\,\gamma_2\delta_2} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2).$$

Nous appellerons ce point A_2 et nous le ferons correspondre à B_2. Que ce soit possible, c'est ce qu'il est facile de voir de la façon suivante. Il existe sur $u\alpha'_1$ deux points KL tels que

$$\frac{\text{arc}\,u\text{K}}{\text{arc}\,u'\gamma_2} = \frac{\text{arc}\,\text{KL}}{\text{arc}\,\gamma_2\delta_2} = \frac{\text{arc}\,\text{L}\alpha'_1}{\text{arc}\,\delta_2\gamma'_1} = \frac{\text{arc}\,u\alpha'_1}{\text{arc}\,u'\gamma'_1}.$$

Ces rapports étant compris entre $\frac{1}{1+\varepsilon_1}$ et $1+\varepsilon_1$, les points K et L sont intérieurs aux deux arcs finis sur lesquels la méthode précédente conduit à choisir α et β; donc le point intérieur au quart de cercle A′ et dont KL sont les correspondants sur ce quart de cercle, est intérieur au rectangle dans lequel doit se trouver le point a correspondant à B_2; les a étant denses dans ce rectangle, on voit qu'il sera possible de trouver un a d'indice minimum et satisfaisant à

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} < \frac{\text{arc}\,\alpha\beta}{\text{arc}\,\gamma_2\delta_2} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2).$$

3° Si B_2 était situé sur le quart de cercle B′ il n'y aurait qu'à supposer dans ce qui précède que γ_2, δ_2 sont confondus, ainsi que les points α, β qui doivent leur correspondre.

A l'avenir nous ne distinguerons plus les points intérieurs des points situés sur le quart de cercle, ce dernier cas rentrant dans le premier qui seul nous occupera maintenant. Il sera bien entendu qu'à tout point d'un quart de cercle on fera correspondre un point du deuxième quart de cercle, c'est-à-dire que si les correspondants

d'un point sur son quart de cercle sont confondus, il devra en être de même pour le point que nous lui ferons correspondre.

Les parallèles aux axes par A_2 et B_2 rencontrant les quarts de cercle respectivement en α_2, β_2 et γ_2, δ_2, on se trouve avoir divisé les deux quarts de cercle en arcs de même nombre sur chacun, et tels que deux arcs correspondants [1] soient toujours entre eux dans un rapport compris entre $\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}$ et $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$, c'est-à-dire *a fortiori* entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$.

Dans A' débarrassé de A'_1 et A_2 nous choisirons le point d'indice minimum et nous l'appellerons A_3, A'_3, A''_3 ou A'''_3 selon que c'est un a, un a', un a'' ou un a'''. Soit, par exemple, A'''_3 ce point. Comme précédemment, des parallèles menées par A'''_3 aux axes rencontrent le quart de cercle en α'''_3, β'''_3, α'''_3 et β'''_3 étant chacun sur un des arcs en lesquels se trouve déjà divisé le quart de cercle. On choisira sur le deuxième quart de cercle les arcs qui correspondent à ceux-là et l'on cherchera le point b''' d'indice minimum de B' débarrassé de B'_1 et B_2 dont les correspondants γ''', δ''' sur le quart de cercle sont respectivement sur les arcs précédents et les partagent en arcs qui soient aux arcs correspondants du premier quart de cercle dans un rapport compris entre

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)} \quad \text{et} \quad (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3).$$

Ceci est possible, toujours en vertu de ce fait que, après la deuxième opération, les arcs correspondants étaient dans un rapport compris entre

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)} \quad \text{et} \quad (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2).$$

De plus, si α'''_3, β'''_3 sont sur le même arc, il faudra, ce qui est possible, que

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)} < \frac{\operatorname{arc}\gamma'''\delta'''}{\operatorname{arc}\alpha'''_3\beta'''_3} < (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3).$$

---

[1] Le sens du mot correspondant est bien clair : $\alpha'_1\beta_2$ et $\gamma'_1\delta_2$, par exemple, se correspondent; de même $u\alpha_2$ et $u'\gamma_2$, ...

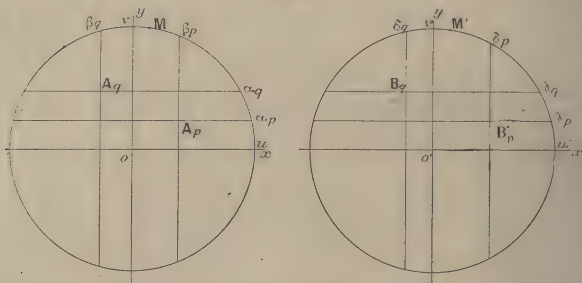
On appellera B_3''' le point de b'' ainsi déterminé et on le fera correspondre à A_3'''.

On continuera ainsi indéfiniment en choisissant alternativement un point dans A' et dans B'. Tout point de A' et tout point de B' sera pris après un nombre d'opérations au plus égal à deux fois son indice primitif, donc fini.

Finalement, on aura établi une correspondance entre les a et les b, les a' et les b', les a'' et les b'', les a''' et les b''', telle que les situations respectives des points soient respectées, c'est-à-dire telle que si A_p et A_q'', par exemple, sont deux points quelconques de A', B_p et B_q'' les points correspondants de B', leurs coordonnées étant X_pY_p, $X_q''Y_q''$ pour A_p et A_q'' et $\mathfrak{X}_p\mathfrak{Y}_p$, $\mathfrak{X}_q''\mathfrak{Y}_q''$ pour B_p et B_q'', $X_p - X_q''$ et $\mathfrak{X}_p - \mathfrak{X}_q''$ soient de même signe, ainsi que $Y_p - Y_q''$ et $\mathfrak{Y}_p - \mathfrak{Y}_q''$.

De plus, si $\alpha_p\beta_p$, $\alpha_q''\beta_q''$ sont les correspondants de A_p, A_q'' sur leur quart de cercle, $\gamma_p\delta_p$, $\gamma_q''\delta_q''$ sont les correspondants de B_pB_q''

Fig. 9.



sur leur quart de cercle, en désignant par n le plus grand des deux nombres p et q, on voit que, au bout de n opérations que nous avons faites précédemment, les deux quarts de cercle se trouvent partagés en arcs en nombre égal, deux arcs correspondants étant dans un rapport compris entre

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)\dots(1+\varepsilon_n)} \qquad \text{et} \qquad (1+\varepsilon_1)\dots(1+\varepsilon_n),$$

c'est-à-dire entre $\frac{1}{1+\varepsilon}$ et $1+\varepsilon$ et *a fortiori* entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$.

Les arcs $\alpha_p\alpha''_q$ et $\gamma_p\gamma''_q$, par exemple, $\beta_q\beta''_q$ et $\delta_q\delta''_q$ seront dans un rapport compris entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$.

Ce classement étant fait, revenons aux ensembles donnés A et B.

Au point A'_p de A' correspondra A_p de A, A_p et A'_p étant symétriques par rapport à Oy.

Au point A''_q de A' correspondra A_q de A, A_q et A''_q étant symétriques par rapport à O.

Au point A'''_r de A' correspondra A_r de A, A_r et A'''_r étant symétriques par rapport à Ox.

Faisons de même pour passer de B' à B, nous aurons alors numéroté les points de A et B, de sorte que :

1° Les positions relatives des points soient respectées [1];

2° Si par deux points A_p, A_q de A on mène les parallèles aux axes, et qu'on fasse de même pour B_p et B_q, les arcs correspondants des deux circonférences C et C' soient toujours dans un rapport compris entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$. C'est bien clair pour deux arcs correspondants dont les extrémités sont dans un même quadrant, et pour deux arcs ayant leurs extrémités dans deux quadrants différents, il suffira de les diviser à l'aide des points de C et C' situés sur les axes coordonnés en arcs qui seront deux à deux dans un rapport compris entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$;

3° Ajoutons que les points de A et B situés sur les deux contours C et C' se correspondent dans les mêmes conditions.

Étudions la façon dont se correspondent les abscisses et les ordonnées des points des deux ensembles. Prenons dans A deux points A_p, A_q; soient B_p et B_q les deux points correspondants de B; $X_p Y_p$, $X_q Y_q$ les coordonnées des deux premiers, $\mathcal{X}_p\mathcal{Y}_p$ et $\mathcal{X}_q\mathcal{Y}_q$ les coordonnées des deux derniers. Étudions les rapports

$$\frac{X_p - X_q}{\mathcal{X}_p - \mathcal{X}_q} \quad \text{et} \quad \frac{Y_p - Y_q}{\mathcal{Y}_p - \mathcal{Y}_q}.$$

---

(1) C'est-à-dire que si à $A_p A_q$ de A correspondent B_p et B_q de B, $X_p Y_p$, $X_q Y_q$ les coordonnées des deux premiers, $\mathcal{X}_p\mathcal{Y}_p$, $\mathcal{X}_q\mathcal{Y}_q$ les coordonnées des deux derniers, les différences $|\mathcal{X}_p| - |\mathcal{X}_q|$ et $|X_p| - |X_q|$ sont de même signe, ainsi que les différences $|\mathcal{Y}_p| - |\mathcal{Y}_q|$ et $|Y_p| - |Y_q|$.

La parallèle à Ox par A_p rencontre le demi-cercle C de droite en α_p.

La parallèle à Oy par A_p rencontre le demi-cercle C supérieur en β_p.

Je fais des constructions analogues pour A_q, B_p, B_q.

Choisissons un sens de rotation arbitraire sur C et soient u et v les abscisses curvilignes de β_p et β_q comptées de V *comme origine;* soient de même u_1, v_1 celles de δ_p, δ_q comptées de V′ dans le même sens que sur C. (On peut supposer C et C′ de rayon 1.)

On a

$$\frac{X_p - X_q}{\mathfrak{X}_p - \mathfrak{X}_q} = \frac{\sin u - \sin v}{\sin u_1 - \sin v_1} = \frac{\sin\frac{u-v}{2}}{\sin\frac{u_1-v_1}{2}} \frac{\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\cos\frac{u_1+v_1}{2}},$$

$\frac{u-v}{2}$, $\frac{u_1-v_1}{2}$, $\frac{u+v}{2}$, $\frac{u_1+v_1}{2}$ sont des arcs compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Donc

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin\frac{u-v}{2}}{\frac{u-v}{2}} < 1$$

et des égalités analogues pour $u_1 - v_1$.

Or

$$\frac{\sin\frac{u-v}{2}}{\sin\frac{u_1-v_1}{2}} = \frac{u-v}{u_1-v_1} \frac{\frac{\sin\frac{u-v}{2}}{\frac{u-v}{2}}}{\frac{\sin\frac{u_1-v_1}{2}}{\frac{u_1-v_1}{2}}};$$

d'autre part,

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{u-v}{u_1-v_1} < 1+\varepsilon,$$

car $u - v$ est la mesure de l'arc $\beta_q\beta_p$, $u_1 - v_1$ celle de l'arc $\delta_q\delta_p$; quant au deuxième rapport, il est visiblement compris entre

$$\frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\frac{2}{\pi(1+\varepsilon)} < \frac{\sin\frac{u-v}{2}}{\sin\frac{u_1-v_1}{2}} < \frac{\pi}{2}(1+\varepsilon),$$

$\cos\frac{u+v}{2}$ est l'ordonnée du milieu M de $\beta_p\beta_q$, $\cos\frac{u_1+v_1}{2}$ est celle du milieu M′ de $\delta_p\delta_q$. M et M′ sont semblablement placées dans les deux cercles, car les relations de situation étant conservées, l'on a $|u_1|>|v_1|$ dès que $|u|>|v|$. Supposons ici $|u|>|v|$; alors arc $\widehat{uM} < \frac{\pi}{2}$.

Le rapport

$$\frac{\cos\frac{u-v}{2}}{\cos\frac{u_1+v_1}{2}} = \frac{\sin\left(\operatorname{arc}\widehat{uM}\right)}{\sin\left(\operatorname{arc}\widehat{u'M'}\right)}.$$

Or, des relations

$$\frac{1}{1-\varepsilon} < \frac{u\beta_p}{u'\delta_p} < 1+\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{u\beta_q}{u'\delta_q} < 1+\varepsilon,$$

on déduit sans peine

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{\operatorname{arc}\widehat{uM}}{\operatorname{arc}\widehat{u'M'}} < 1+\varepsilon.$$

Le rapport

$$\frac{\cos\frac{u+v}{2}}{\cos\frac{u_2-v_1}{2}} = \frac{\operatorname{arc}\widehat{uM}}{\operatorname{arc}\widehat{u'M}}\;\frac{\frac{\sin\left(\operatorname{arc}\widehat{uM}\right)}{\operatorname{arc}\widehat{uM}}}{\frac{\sin\left(\operatorname{arc}\widehat{uM'}\right)}{\operatorname{arc}\widehat{uM'}}}$$

est par suite compris entre

$$\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{\pi(1+\varepsilon)}.$$

Finalement,

$$\left[\frac{2}{\pi(1-\varepsilon)}\right]^2 < \frac{X_p-X_q}{\mathfrak{X}_p-\mathfrak{X}_q} < \left[\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)\right]^2,$$

et une analyse identique pour $\frac{Y_p-Y_q}{\mathfrak{Y}_p-\mathfrak{Y}_q}$ donnera les mêmes limites.

De là on déduit immédiatement

$$\left[\frac{2}{\pi(1+\varepsilon)}\right]^2 < \frac{\sqrt{(X_p-X_q)^2+(Y_p-Y_u)^2}}{\sqrt{(\mathcal{X}_p-\mathcal{X}_q)^2+(\mathcal{Y}_p-\mathcal{Y}_q)^2}} < \left[\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)\right]^2;$$

c'est dire qu'il existe un nombre $\alpha > 1$ $\left\{\text{ici ce serait } \alpha = \left[\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)\right]^2\right\}$, tel que le numérotage adopté vérifie les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\overline{A_p A_q}}{\overline{B_p B_q}} < \alpha,$$

quels que soient p et q.

De même, en considérant les angles a et b que font $\overline{A_p A_q}$ et $\overline{B_p B_q}$ avec Ox et $O'x'$,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{Y_p - Y_q}{X_p - X_q},$$

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\mathcal{Y}_p - \mathcal{Y}_q}{\mathcal{X}_p - \mathcal{X}_q},$$

on aurait

$$\frac{1}{\alpha^2} < \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} < \alpha^2.$$

La correspondance adoptée se rapproche donc d'une similitude, en ce sens que le rapport de deux segments homologues, sans être fixe, reste compris entre deux nombres fixes positifs.

Cette propriété fondamentale nous permet, comme nous l'avons fait pour les ensembles linéaires, d'étendre à tous les points situés à l'intérieur de C et de C' ou sur ces deux contours la correspondance établie entre les points des deux ensembles A et B partout denses dans C et C'.

Envisageons en effet un point P quelconque de C, ou de l'intérieur de C, n'appartenant pas à A; on peut trouver d'une infinité de manières dans A une suite de points

$$(1) \qquad A_{m_1}, \quad A_{m_2}, \quad \ldots, \quad A_{m_q}, \quad \ldots$$

qui tendent vers P; c'est dire qu'on aura, dès que q et q' seront supérieurs à une certaine valeur Q fonction de η,

$$\overline{A_{m_q} A_{m_{q'}}} < \eta,$$

η étant arbitrairement petit.

Les points correspondants de B

$$(2) \qquad B_{m_1}, \quad B_{m_2}, \quad \ldots, \quad B_{m_q}, \quad \ldots$$

seront tels que, pour q et $q' \geqq Q$, on aura

$$\overline{B_{m_q} B_{m_{q'}}} < \alpha\eta$$

et comme η est arbitrairement petit; on voit qu'ils tendront vers une limite P′. Il aurait d'ailleurs suffi pour établir ce fait d'observer que les projections des points de A et B sur Ox et $O'x'$ se correspondent, avec conservation des relations de situation [1] en sorte que, d'après ce qu'on a vu pour les ensembles linéaires, si les projections des A_{m_i} tendent vers une limite, il en est de même de celles des B_{m_i}. Le même raisonnement, fait pour les projections sur Oy et $O'y'$ des A_{m_i} et des B_{m_i}, prouve que les deux suites (1) et (2) ont des limites P et P′ qui se correspondent.

La façon dont nous venons de ramener le cas actuel d'un domaine à deux dimensions au cas des domaines à une dimension, à savoir les projections sur Ox et $O'x'$ des points de A et de B, montre en outre que P′ est indépendant de la suite (1) choisie tendant vers P. Elle montre aussi que les relations d'inégalité

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\overline{A_p A_q}}{\overline{B_p B_q}} < \alpha$$

et les relations analogues relatives aux angles sont vérifiées par deux points quelconques P et Q intérieurs à C ou sur C et leurs correspondants P′, Q′.

Il n'est pas inutile d'observer qu'à des points P situés *sur une même parallèle* à Ox correspondent des points P′ situés *sur une même parallèle* à $O'x'$, et que de même les parallèles à Oy et à $O'y'$ se correspondent. Ce fait intéressant tient au fond à la conservation des relations de situation qui caractérise notre correspondance. Il est encore bien clair que ces relations de situation qui sont conservées entre les points de A et B le sont encore entre

---

(1) A cause du fait que sur toute parallèle aux axes il y a au plus un point de A ou de B, on voit que ces projections correspondent d'une façon biunivoque aux points de A et B eux-mêmes.

tous les points intérieurs à C et C′ ou sur les contours. Tout ceci se déduit des propriétés analogues pour les ensembles linéaires.

Il importe toutefois de mettre en lumière une conséquence du fait que les parallèles aux axes se correspondent, qui donnera la vraie raison de la transformation par laquelle nous sommes passés au préalable, de A à A′, de B à B′. Toute parallèle Δ à Oy, par exemple, rencontre C en deux points D, E symétriques par rapport à Ox, la correspondante Δ′ de Δ rencontre C′ en D′ et E′ qui doivent correspondre à D et E (puisqu'à des points de C correspondent des points de C′), il en résulte donc que les parallèles par D et E à Ox doivent correspondre aux parallèles par D′ et E′ à $O'x'$ ou, en somme, *qu'à deux parallèles à* Ox *symétriques par rapport à* Ox correspondent toujours *deux parallèles à* $O'x'$ *symétriques par rapport à* $O'x'$. Il doit en être de même pour les parallèles à Oy et $O'y'$. Mais le fait que les relations de situation sont conservées dans la correspondance entre A′ et B′ indique simplement qu'elle est conservée entre les *valeurs absolues* des coordonnées des points de A et B, c'est-à-dire que

$$|\mathfrak{X}_p| - |\mathfrak{X}_q| \quad \text{et} \quad |X_p| - |X_q|$$

sont toujours de même signe, ainsi que

$$|\mathfrak{Y}_p| - |\mathfrak{Y}_q| \quad \text{et} \quad |Y_p| - |Y_q|,$$

quels que soient les points $A_p(X_p Y_p)$, $A_q(X_q Y_q)$ et leurs correspondants $B_p(\mathfrak{X}_p \mathfrak{Y}_p)$, $B_q(\mathfrak{X}_q \mathfrak{Y}_q)$.

Si donc on a deux suites d'abscisses

(3) $X_{m_1}, \quad X_{m_2}, \quad \ldots, \quad X_{m_q}, \quad \ldots$

(4) $X_{m'_1}, \quad X_{m'_2}, \quad \ldots, \quad X_{m'_q}, \quad \ldots,$

tendant la première vers un nombre X, la seconde vers le nombre — X, il leur correspondra des abscisses

(5) $\mathfrak{X}_{m_1}, \quad \mathfrak{X}_{m_2}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{X}_{m_q}, \quad \ldots,$

(6) $\mathfrak{X}_{m'_1}, \quad \mathfrak{X}_{m'_2}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{X}_{m'_q}, \quad \ldots,$

tendant la première vers $\mathfrak{X}$, la deuxième vers $-\mathfrak{X}$, puisque les séries des valeurs absolues de (3) et (4) tendant vers $|X|$, les séries des valeurs absolues de (5) et (6) devront tendre vers la même limite $|\mathfrak{X}|$. Même remarque pour les ordonnées.

On voit donc, en résumé, que la correspondance étendue à tous les points de C, C′ et de leur intérieur *conserve la symétrie par rapport aux axes coordonnés*, qu'elle transforme les parallèles aux axes de C en parallèles aux axes de C′ (les axes se correspondent) : à deux parallèles à Oy, d'abscisses X, X′, correspondent deux parallèles à $O'y'$, d'abscisses $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, et l'on a toujours

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{X - X'}{\mathfrak{X} - \mathfrak{X}'} < \alpha,$$

α étant un nombre positif fixe > 1 ; à deux ordonnées Y et Y′ correspondent de même deux ordonnées $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$, telles que

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{Y - Y'}{\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}'} < \alpha,$$

d'où il résulte qu'à deux points P, Q dans C correspondent P′, Q′ dans C′ tels que

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} < \alpha,$$

$$\frac{1}{\alpha^2} < \frac{\operatorname{tang}(Ox, \overline{PQ})}{\operatorname{tang}(O'x', P'Q')} < \alpha^2.$$

La correspondance ainsi réalisée transforme tout ensemble E régulier de mesure nulle ayant pour points fondamentaux les points de A en un ensemble E′ du même type ayant pour points fondamentaux les points de B.

En effet, soient $A_n^{(h)}$ les carrés d'exclusion qui définissent E. Au carré $A_n^{(h)}$ à côtés parallèles aux axes correspond un rectangle $B_n^{(h)}$ à côtés parallèles aux axes contenant B_n à son intérieur et tel que le rapport entre les côtés de B_n^h et ceux de A_n^h soit compris entre $\frac{1}{\alpha}$ et α.

Donc

$$\text{aire}\, B_n^{(h)} < \alpha^2 [\text{aire}\, A_n^{(h)}].$$

On en conclut que, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{aire}\, A_n^{(h)}$$

étant convergente quel que soit h, il en sera de même de la

série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{aire } B_n^{(h)}.$$

Lorsque n reste fixe et h augmente indéfiniment $A_n^{(h)}$ tend vers A_n, donc $B_n^{(h)}$ tend vers B_n. Les rectangles $B_n^{(h)}$ pour n fixe sont emboîtés les uns dans les autres comme les $A_n^{(h)}$. On conclut évidemment que *les* $B_n^{(h)}$ *définissent un ensemble régulier de mesure nulle* E′, dont les points correspondent d'une façon biunivoque aux points de E.

Revenons maintenant aux deux ensembles primitifs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement denses dans deux aires d'un seul tenant, limitées par Γ et Γ′ que nous avons représentés d'une façon conforme sur deux cercles égaux, les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ se transformant dans les ensembles A et B.

La correspondance établie entre les points de A et B s'étend aux points de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Si, par exemple, $\mathcal{A}_p$ s'est transformé en A_p et $\mathcal{B}_p$ en B_p, on fera correspondre $\mathcal{A}_p$ et $\mathcal{B}_p$, mais il est évident que les relations de situation que conservait la correspondance entre A et B ne seront pas en général conservées par la correspondance entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Cela étant : à tout ensemble $\mathcal{E}$ de mesure nulle dont les points fondamentaux sont les points de $\mathcal{A}$, la transformation conforme de Γ en C fait correspondre un ensemble E de mesure nulle, dont les points fondamentaux sont les points de A.

En effet, aux $\mathcal{A}_n$ correspondent les A_n; à tout domaine $\mathcal{A}_n^{(h)}$ entourant $\mathcal{A}_n$ correspond un domaine entourant A_n; aux domaines emboîtés $\mathcal{A}_n^{(h)}$ obtenus pour n fixe et h croissant, correspondent des domaines $A_n^{(h)}$ emboîtés; la transformation étant partout régulière, le rapport entre les aires de $A_n^{(h)}$ et de $\mathcal{A}_n^{(h)}$ est compris entre deux limites fixes, on en conclut que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(h)}$$

converge dès que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n^{(h)}.$$

converge et que sa somme tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$. Donc, à l'ensemble régulier de mesure nulle défini par les $\mathcal{A}_n^{(h)}$ correspond un ensemble de mesure nulle défini par les $A_n^{(h)}$.

Les domaines $A_n^{(h)}$ n'auront en général pas la forme de carrés ou de rectangles à côtés parallèles aux axes. Mais on peut choisir pour chaque valeur de n et de h un carré $\alpha_n^{(h)}$ de centre A_n intérieur à $A_n^{(h)}$ et un carré $\alpha_n'^{(h)}$ contenant $A_n^{(h)}$, ces carrés s'emboîtant les uns dans les autres et tendant vers les A_n quand h croît. L'ensemble E_1 défini par les carrés auxiliaires $\alpha_n^{(h)}$, ensemble qui est de mesure nulle a tous ses points intérieurs à l'ensemble E, de mesure nulle, défini par les $A_n^{(h)}$. L'ensemble de mesure nulle E'_1 défini par les carrés $\alpha_n'^{(h)}$ contient tous les points de E.

Ceci posé, considérons l'ensemble $\mathcal{B}$ des points à coordonnées rationnelles à l'intérieur et sur le contour d'un cercle Γ' de centre O, de rayon 1. Nous représenterons ce cercle Γ' sur C' en sorte que sur tout rayon de C' se trouve un point au plus de l'ensemble B transformé de $\mathcal{B}$. Entre A et B, nous établissons la correspondance que nous venons d'étudier, l'ensemble E_1 se transforme en un ensemble régulier de mesure nulle F_1, E'_1 en F'_1. Donc E se transforme aussi en un ensemble de mesure nulle : F. F_1, F'_1 seront définis par les domaines $\beta_n^{(h)}$ $\beta_n'^{(h)}$ entourant les points fondamentaux B_n, F sera défini par les domaines $B_n^{(h)}$; chaque $B_n^{(h)}$ entourant $\beta_n^{(h)}$ et étant compris dans $\beta_n'^{(h)}$.

Si maintenant on repasse de B à $\mathcal{B}$, F_1 et F'_1 se transforment en deux ensembles de mesure nulle $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}'_1$ ayant pour points fondamentaux les $\mathcal{B}_n$. Donc F se transforme en un ensemble de mesure nulle $\mathcal{F}$ ayant les mêmes points fondamentaux.

Pour préciser, l'ensemble $\mathcal{F}_1$ défini par les domaines qui sont les transformés des $\beta_n^{(h)}$ et $\mathcal{F}'_1$ défini par les domaines qui sont les transformés des $\beta_n'^{(h)}$ sont tels que $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{F}_1$ et est contenu dans $\mathcal{F}'_1$.

Or les domaines transformés des $\beta_n^{(h)}$ sont des domaines réguliers entourant les $\mathcal{B}_n$; pour chaque valeur de h, la somme des aires de ces domaines est finie et elle tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$.

Pour chaque valeur de h, on peut à l'intérieur du transformé de $\beta_n^{(h)}$ tracer un carré de centre $\mathcal{B}_n$ que nous appellerons $\mathcal{B}_n^{(h)}$.

Pour chaque valeur de h, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{aire } \mathfrak{G}_n^{(h)}$$

converge et sa somme tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$. Donc les $\mathfrak{G}_n^{(h)}$ définissent un ensemble $\mathcal{E}'_1$ régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont les $\mathfrak{G}_n$, l'ensemble $\mathcal{E}'_1$ étant intérieur à l'ensemble $\mathfrak{F}_1$ défini par les transformés de $\beta_n^{(h)}$, lequel est lui-même intérieur à l'ensemble $\mathfrak{F}$ transformé de F, qui correspond point par point à l'ensemble $\mathcal{E}$ primitif.

On conclut de là que la puissance de l'ensemble $\mathcal{E}$ est au moins égale à celle de l'ensemble $\mathcal{E}'_1$ (¹).

Mais $\mathcal{E}'_1$ est un ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont les points de coordonnées rationnelles et nous avons démontré qu'un tel ensemble a toujours la puissance du continu.

En définitive, nous obtenons ce résultat fondamental :

Un ensemble régulier de mesure nulle $\mathcal{E}$ dont les points fondamentaux sont partout denses dans une aire a toujours la puissance du continu, quelque rapide que soit la décroissance des intervalles d'exclusion qui servent à le définir.

D'une manière générale, il résulte de l'étude faite dans ce Chapitre que, pour beaucoup de recherches, on peut, sans restreindre la généralité, remplacer un ensemble dénombrable quelconque dense dans une aire par l'ensemble des points à coordonnées rationnelles, sur lesquels certaines démonstrations sont plus aisées, en raison des propriétés des fractions continues.

(¹) On aurait pu envisager pour chaque valeur de h le plus petit carré $\mathfrak{G}_n'^{(h)}$ de centre $\mathfrak{G}_n$ contenant le contour transformé de $\beta_n'^{(h)}$. Ces carrés $\mathfrak{G}_n'^{(h)}$ définiraient visiblement un ensemble régulier de mesure nulle $\mathcal{E}'_2$ qui contiendrait tous les points de $\mathfrak{F}'_1$, donc de $\mathfrak{F}$. Donc $\mathfrak{F}$ est intérieur à un ensemble régulier de mesure nulle $\mathcal{E}'_2$ et contient tous les points d'un ensemble régulier $\mathcal{E}'_1$.



CHAPITRE V.

LES DOMAINES C. LES FONCTIONS MONOGÈNES NON ANALYTIQUES DÉFINIES DANS LES DOMAINES DE CAUCHY.

I. — Les domaines C.

Nous avons étudié dans les trois premiers Chapitres de ces Leçons des domaines dans lesquels on pouvait définir, au sens de Weierstrass, une fonction analytique; nous avons vu en particulier qu'un domaine W pouvait toujours être considéré comme la limite d'un domaine D_n d'un seul tenant, limité par un nombre fini d'arcs de cercle.

Ces domaines W ne sont pas les domaines les plus généraux dans lesquels on puisse définir une fonction monogène, en adoptant le point de vue de Cauchy exposé au Chapitre I; nous allons, dans les lignes suivantes, définir des domaines plus généraux que les domaines W et dans lesquels peut être définie une fonction monogène uniforme.

Nous verrons que les propriétés essentielles des fonctions monogènes dans les domaines que nous définirons, domaines que nous appellerons domaines de Cauchy ou domaines C, sont les mêmes que dans les domaines W; ceci n'exclut pas la possibilité de définir des domaines C′ plus généraux encore que nos domaines C. En d'autres termes, nous ne pouvons affirmer que notre généralisation embrasse *toutes* les fonctions monogènes uniformes; mais elle nous conduira à définir une classe C de telles fonctions, classe plus générale que la classe W des fonctions analytiques de Weierstrass.

Envisageons une portion $\mathcal{A}$ du plan (1) contenant un ensemble de

---

(1) Pour fixer les idées $\mathcal{A}$ sera un cercle de rayon 2 ($|z| < 2$) et les points A_n seront partout denses dans l'intérieur du cercle de rayon 1 ($|z| < 1$).

points partout dense dans une partie de l'aire envisagée. On pourra supposer, si l'on veut, que ces A_n sont des points à coordonnées rationnelles; d'après les considérations du Chapitre IV cette hypothèse, qui simplifie certaines démonstrations, ne restreint pas la généralité des résultats.

De chaque point A_n comme centre nous décrirons des cercles dont les rayons seront liés très simplement aux termes r_n d'une série

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n + \ldots; \tag{1}$$

nous supposerons cette série convergente, et en outre qu'on a, quel que soit n,

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} r_h < \frac{r_n}{4},$$

c'est-à-dire que le reste de la série est toujours inférieur au quart du dernier terme conservé.

Dans la définition de C interviennent des domaines $C'^{(h)}$ et $C^{(h)}$ dépendant d'un indice h que nous allons d'abord définir.

1° *Définition de* $C'^{(h)}$. — De chaque point A_n comme centre avec un rayon égal à $\frac{r_n}{2^h}$ décrivons un cercle $S'^{(h)}_n$. Le domaine $C'^{(h)}$ sera constitué par les points de $\mathcal{A}$ *qui restent après exclusion des points intérieurs* (¹) *à tous les cercles* $S'^{(h)}_n$. Que le domaine $C'^{(h)}$ renferme effectivement des points pour h suffisamment grand, c'est ce qu'il est facile de voir par un raisonnement déjà fait plusieurs fois. Si en effet nous projetons les cercles $S'^{(h)}_n$ sur une droite D quelconque, l'axe Ox par exemple, la somme des longueurs des segments suivant lesquels ils se projettent est

$$2\sum \frac{r_n}{2^h} = \frac{2}{2^h}\sum r_n;$$

pour h assez grand elle est inférieure à tout nombre donné ε. Donc, sur tout segment de longueur $\geq \varepsilon$ pris sur D, on peut trouver au moins un point n'appartenant à aucun des segments précédents et par ce point passe une perpendiculaire à D qui ne

(¹) Intérieur est pris ici au sens strict.

rencontre aucun des cercles $S_n'^{(h)}$, et dont tous les points sont par suite extérieurs à ces $S_n'^{(h)}$.

Il est clair en outre que si un point P appartient au domaine $C'^{(h)}$ il appartient *a fortiori* à $C'^{(h+1)}$, puisque $S_n'^{(h+1)}$ est intérieur à $S_n'^{(h)}$.

2° Définissons maintenant $C^{(h)}$. Le domaine $C'^{(h)}$ peut n'être pas d'un seul tenant, si les cercles $S_n'^{(h)}$ se coupent. Nous allons lui substituer le domaine $C^{(h)}$ d'un seul tenant et tel que tout point de $C'^{(h)}$ (c'est-à-dire extérieur aux $S_n'^{(h)}$) appartienne à $C^{(h)}$, tel aussi que tout point de $C^{(h)}$ appartienne à $C'^{(h+1)}$. A cet effet substituons aux cercles $S_n'^{(h)}$ des cercles $S_n^{(h)}$ qui ne se coupent pas et que nous allons maintenant définir. Considérons le premier des cercles $S_n'^{(h)}$, soit $S_1'^{(h)}$, son centre est A_1; envisageons aussi $S_1'^{(h+1)}$, leurs rayons respectifs sont $\frac{r_1}{2^h}$ et $\frac{r_1}{2^{h+1}}$. Le cercle $S_1'^{(h)}$ peut couper certains des cercles $S_n'^{(h)}$ $n \geqq 2$; mais, la différence des rayons de $S_1'^{(h)}$ et $S_1'^{(h+1)}$ étant $\frac{r_1}{2^{h+1}}$ et la somme des DIAMÈTRES de tous les cercles $S_n'^{(h)}$ $n \geqq 2$ étant

$$\frac{1}{2^{h-1}} \sum_{n=2}^{\infty} r_n,$$

il est visible que l'inégalité supposée vérifiée dès le début

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} r_p < \frac{r_n}{4}$$

entraîne ici

$$\frac{1}{2^{h-1}} \sum_{n=2}^{\infty} r_n < \frac{r_1}{2^{h+1}}.$$

Si donc on envisage un rayon issu de A_1 et si sur ce rayon on envisage les segments découpés par les deux cercles de centre A_1 tangents intérieurement et extérieurement à $S_n'^{(h)}$ pour toute valeur de $n \geqq 2$, il est clair que la somme de ces segments est

$$\frac{1}{2^{h-1}} \sum_{n=2}^{\infty} r_n;$$

elle est $< \frac{r_1}{2^{h+1}}$ segment découpé sur le rayon précédent par les deux cercles $S_1'^{(h)}$ et $S_1'^{(h+1)}$, on peut donc sur le rayon en question

trouver un point au moins ([1]) qui n'appartienne à aucun des segments ci-dessus, qui soit extérieur à tous ces segments, ceci équivaut à dire qu'on peut trouver un cercle $S_1^{(h)}$ de centre A_1 compris entre $S_1'^{(h)}$ et $S_1'^{(h+1)}$ et ne coupant aucun des cercles $S_n'^{(h)}$ pour $n \geqq 2$ ([2]); $r_1^{(h)}$ sera le rayon de $S_1^{(h)}$

$$\frac{r_1}{2^{h+1}} < r_1^{(h)} < \frac{r_1}{2^h}.$$

Il y a plus; l'inégalité

$$r_1 > 4\sum_{n=2}^{\infty} r_n$$

prouve en particulier qu'on a

$$r_1^{(h)} > \frac{\sum_{n=2}^{\infty} r_n}{2^{h-1}}$$

et plus particulièrement

$$r_1^{(h)} > \frac{r_n}{2^h} \qquad \text{pour} \qquad n \geqq 2.$$

Donc $S_1^{(h)}$ ne coupant aucun des $S_n'^{(h)}$ pour $n \geqq 2$, il s'ensuit que tout cercle $S_n'^{(h)}$ $(n \geqq 2)$ est ou intérieur à $S_1^{(h)}$ ou extérieur à $S_1^{(h)}$; en aucun cas un $S_n'^{(h)}$ ne peut contenir à son intérieur $S_1^{(h)}$. Donc $S_1^{(h)}$ qui ne coupe aucun des $S_n'^{(h)}$ ne coupe aucun des $S_n'^{(h+p)}$ $(n \geqq 2)$ quel que soit d'ailleurs l'entier positif p.

Opérons avec $S_2'^{(h)}$ comme nous venons d'opérer avec $S_1'^{(h)}$ pour lui substituer $S_1^{(h)}$, nous ferons abstraction de $S_1^{(h)}$ et nous envisagerons tous les $S_n'^{(h)}$ pour $n \geqq 3$; on peut alors trouver un cercle $S_2^{(h)}$ de centre A_2 dont le rayon soit $r_2^{(h)}$,

$$\frac{r_2}{2^{h+1}} < r_2^{(h)} < \frac{r_2}{2^h},$$

et qui ne coupe aucun des $S_n'^{(h)}$ pour $n \geqq 3$. Ce cercle $S_2^{(h)}$ étant

---

([1]) On sait même (voir *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 43) qu'il y a une infinité non dénombrable de points jouissant de cette propriété. Pour opérer d'une façon précise, on prendra le *point le plus voisin de* A_1, en acceptant qu'il puisse coïncider avec l'extrémité d'un des segments précédents, ce qui n'introduit pas de difficulté.

([2]) $S_1^{(h)}$ pourra être tangent à certains $S_n'^{(h)}$ $(n \geqq 2)$, ce qui n'a pas d'importance pour la suite.

intérieur à $S_2^{(h)}$ ne coupera pas $S_1^{(h)}$; on continuera ainsi de proche en proche, et l'on substituera aux $S_n'^{(h)}$ des cercles $S_n^{(h)}$ concentriques dont les rayons vérifient la double inégalité

$$\frac{r_n}{2^{h+1}} < r_n^{(h)} < \frac{r_n}{2^h}.$$

Le processus indiqué pour la formation de $S_1^{(h)}$ et $S_2^{(h)}$ prouve que tous ces cercles $S_n^{(h)}$ ne se coupent jamais. L'ensemble des points de $\mathcal{A}$ qui restent après exclusion de tous les points intérieurs aux $S_n^{(h)}$, au sens strict, ensemble qui contient certainement des points pour h assez grand, est donc d'un seul tenant ; nous l'appelons $C^{(h)}$.

Évidemment $C'^{(h)}$ est tout entier intérieur à $C^{(h)}$, c'est-à-dire que tous ses points appartiennent à $C^{(h)}$; il est évident aussi que tous les points de $C^{(h)}$ appartiennent à $C'^{(h+1)}$; on peut écrire ceci :

$$C'^{(h)} < C^{(h)} < C'^{(h+1)}.$$

Nous ferons la construction précédente pour toute valeur de h ; pour chaque valeur de h, nous aurons un domaine $C^{(h)}$ défini par des cercles $S_n^{(h)}$; le cercle $S_n^{(h+1)}$ étant intérieur au cercle $S_n^{(h)}$, il est clair que $C^{(h)}$ est intérieur à $C^{(h+1)}$

$$C^{(h)} < C^{(h+1)}.$$

Nous désignerons alors par C l'ensemble des points qui appartiennent à $C^{(h)}$ pour une certaine valeur de h ; d'une façon précise, un point P sera dit intérieur à C, si pour une certaine valeur h_1 de h, et conséquemment pour toutes les valeurs $h > h_1$, P appartient à $C^{(h)}$. Les deux relations

$$C'^{(h)} < C^{(h)} < C'^{(h+1)}$$

prouvent que tout point P intérieur à C appartient à $C'^{(h)}$ pour une valeur convenable de h, ici ce serait $(h > h_1 + 1)$. L'ensemble C défini par les points qui appartiennent aux $C'^{(h)}$ à partir d'une certaine valeur de h est donc identique à l'ensemble C défini de même à l'aide des $C^{(h)}$, et les domaines $C^{(h)}$ présentent sur les $C'^{(h)}$ l'avantage d'être d'un seul tenant.

On a vu que les cercles $S_n^{(h)}$ ne se coupent pas deux à deux. Si donc un point de la circonférence de $S_n^{(h)}$ est extérieur à tous les $S_p^{(h)}$

dont l'indice p diffère de n, tous les points de la circonférence de $S_n^{(h)}$ jouiront de la même propriété; tous les points de cette circonférence $S_n^{(h)}$ sont alors dits appartenir à la *frontière du domaine* $C^{(h)}$ (1). Dans ces conditions *la frontière de* $C^{(h)}$ est constituée par une infinité dénombrable de circonférences extérieures deux à deux, et il est clair que tout point de la frontière de $C^{(h)}$ appartient à $C^{(h+1)}$ d'après la construction même. Les points de $C^{(h)}$ qui n'appartiennent pas à cette frontière sont dits *intérieurs* à $C^{(h)}$, étant toujours bien entendu que *intérieur* a ici un sens différent de celui adopté dans la théorie des domaines W (2). L'ensemble $C^{(h)}$ obtenu en excluant d'une aire plane les points intérieurs (sens strict) à une infinité dénombrable de cercles $S_n^{(h)}$ est un ensemble parfait; il est formé par les points de la frontière de $C^{(h)}$ et leurs points limites. En effet, si P est un point *intérieur* à $C^{(h)}$, dans un cercle arbitrairement petit de centre P, il y a une infinité de points A_n; si l'on envisage un de ces points, il est centre d'un cercle $S_n^{(h)}$ qui laisse P à son extérieur; ou bien ce cercle appartient à la frontière de $C^{(h)}$, ou bien il est intérieur à un autre cercle $S_n^{(h)}$ qui laisse aussi P à son extérieur; ce raisonnement répété autant de fois qu'il sera nécessaire prouve que, entre A_n et P, il y a au moins un point de la frontière de $C^{(h)}$; dans un cercle de centre P, aussi petit qu'on voudra, il y a des points de la frontière de $C^{(h)}$; ce raisonnement est encore applicable lorsque P appartient à l'un des cercles qui constituent la frontière de $C^{(h)}$, il suffit de considérer un A_n extérieur au cercle sur lequel se trouve P et de faire sur lui le même raisonnement que précédemment pour conclure que tout point de $C^{(h)}$ est limité de points de la frontière de $C^{(h)}$. Inversement tout point qui n'est pas de $C^{(h)}$ est intérieur au sens strict à un des cercles $S_n^{(h)}$; il n'est donc pas point-limite de points de la frontière de $C^{(h)}$. Il suit de là bien facilement que tout point-limite de points frontières de $C^{(h)}$ appar-

---

(1) Il est visible que toutes les circonférences $S_n^{(h)}$ n'appartiennent pas à la frontière; car $S_1^{(h)}$ par exemple renferme à son intérieur une infinité dénombrable de circonférences $S_n^{(h)}$ dont les points ne peuvent former frontière de $C^{(h)}$; puisque tout point intérieur à $S_1^{(h)}$ n'appartient pas à $C^{(h)}$.

(2) L'ensemble complémentaire de $C^{(h)}$ étant, comme les A_n eux-mêmes, partout dense dans l'aire envisagée, il est clair que $C^{(h)}$ ne renferme aucun point qui lui soit intérieur au sens de Weierstrass.

tient à C^{h}. Donc $C^{(h)}$ est parfait ; il est formé par *les points de sa frontière et leurs points limites*. Ces points limites qui n'appartiennent pas à la frontière sont des points intérieurs à $C^{(h)}$.

Le domaine C, que nous avons défini, n'est pas parfait. Il admet, en effet, comme points limites tous les points A_n de l'aire $\mathcal{A}$. Ceci résulte de ce que $\frac{r_n}{2^h}$ et, par suite, $r_n^{(h)}$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{h}$. Les points exclus de $\mathcal{A}$ pour donner $C^{(h)}$ forment donc un ensemble dont la mesure tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$, autrement dit l'ensemble complémentaire $\mathcal{A} - C$ de C est de mesure nulle, et il est clair que les A_n n'appartenant à aucun des $C^{(h)}$, n'appartiennent pas à C. Les A_n étant d'ailleurs partout denses dans $\mathcal{A}$, il s'ensuit que C a pour points limites tous les points de $\mathcal{A}$. L'ensemble des points de $\mathcal{A}$ qui n'appartiennent pas à C est un ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont les A_n et qui est défini à l'aide des cercles d'exclusion $S_n^{(h)}$. Il a donc la puissance du continu et comprend bien d'autres points que les A_n. C n'étant pas parfait, il nous sera commode, dans la suite, de raisonner sur les domaines parfaits $C^{(h)}$ intérieurs à C. Ces $C^{(h)}$ joueront à peu près dans notre théorie le rôle que les domaines parfaits D_n *complètement intérieurs à un domaine* W ont joué dans nos premiers Chapitres, ou encore le rôle que, dans la théorie des séries entières, les cercles un peu plus petits que le cercle de convergence jouent dans toute étude de la fonction définie par la série. L'utilité d'avoir des $C^{(h)}$ parfaits est manifeste, car les propriétés des fonctions définies sur des ensembles parfaits sont très voisines de celles des fonctions définies sur une aire plane.

Nous dirons qu'un domaine T est *intérieur* [1] à C, lorsque tous les points de T appartiennent à un même $C^{(p)}$, d'indice fixe. Parmi les domaines intérieurs à C, nous considérerons à peu près exclusivement les domaines $C^{(p)}$: tous les points de $C^{(p)}$ sont intérieurs à $C^{(p+1)}$.

Le domaine C sera dit appartenir à la classe (C) des domaines de Cauchy que nous étudions ici si les nombres r_n sont tels qu'on

---

[1] Rappelons encore une fois que le mot *intérieur* a ici un sens différent de celui qu'on lui donne habituellement, et en particulier dans la théorie des domaines W.

a (¹)

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n}{\log\log\log\frac{1}{r_n}} = 0.$$

Il est clair que si cette condition est vérifiée pour deux domaines C et D, elle est vérifiée pour la partie commune à C et D.

En même temps que les domaines $C^{(p)}$ et C, nous considérerons, comme moyen auxiliaire de démonstration, des domaines que nous appellerons *domaines réduits* et que nous désignerons par $\Gamma^{(p)}$ et Γ. A un domaine C correspond un système bien déterminé de domaines $C^{(p)}$, et une infinité de systèmes de domaines réduits; voici la définition d'un de ces systèmes. Donnons-nous des nombres ρ_n, tendant rapidement vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, mais beaucoup moins rapidement que les r_n; plus précisément, nous supposerons que l'on a

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_n^2} < \log\log\frac{1}{r_n}$$

et, en même temps, quel que soit le nombre fixe α

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} n^\alpha \rho_n = 0,$$

ces deux conditions (2) et (3) sont bien compatibles en vertu de (1) (²).

Les domaines $\Gamma^{(p)}$ sont définis au moyen des ρ_n comme les $C^{(p)}$ au moyen des r_n, c'est-à-dire sont limités par des cercles de rayons

(¹) On constatera aisément que la plupart des raisonnements et des résultats que nous allons obtenir s'étendraient sans difficulté au cas où les cercles d'exclusion $S_n^{(p)}$ auraient des rayons exprimés par la formule $r'_n + \frac{r_n}{2^p}$, les r'_n étant indépendants de p, mais tendant vers zéro plus rapidement que les r_n lorsque n augmente indéfiniment, de sorte que pour toute valeur fixe de p, le terme r'_n est asymptotiquement négligeable. Dans ce cas, le domaine exclu à l'infini *n'est pas* de mesure nulle, mais de mesure $\pi \Sigma r_n'^2$. Je développerai ultérieurement l'étude de ce cas.

(²) On peut remplacer (1), (2), (3) par des conditions plus larges. Voir *Comptes rendus*, mai et juin 1912, où j'indique aussi d'autres modes d'exposition de la théorie, préférables lorsqu'on veut l'étendre au cas des fonctions multiformes.

compris entre $\frac{\rho_n}{2^p}$ et $\frac{\rho_n}{2^{p+1}}$, extérieurs les uns aux autres. Le domaine Γ est formé par l'ensemble des points *intérieurs* (au sens indiqué plus haut) à quelque $\Gamma^{(p)}$. Les domaines $\Gamma^{(p)}$ sont parfaits, Γ n'est pas parfait; l'ensemble complémentaire de Γ est de mesure nulle et a la puissance du continu.

Il est manifeste que l'ensemble C comprend tous les points de Γ, puisque $C^{(p)}$ comprend tous les points de $\Gamma^{(p)}$; mais C comprend en outre bien des points qui n'appartiennent pas à Γ.

L'utilité principale de la considération de Γ résulte de la proposition suivante :

Si une fonction des deux variables x, y coordonnées d'un point M *est définie pour tous les points de* C *et continue sur tout domaine* $C^{(p)}$, *la connaissance de ses valeurs en tous les points de* Γ *entraîne la connaissance de ses valeurs en tous les points de* C.

D'une manière abrégée, deux fonctions continues dans C (c'est-à-dire définies dans tout C et continues dans tout domaine *intérieur* à C) ne peuvent pas coïncider dans tout Γ sans coïncider dans tout C; ou, enfin, *une fonction continue dans* C *et nulle dans* Γ *est nulle dans* C.

Soit en effet A un point de C; ce point appartient à un ensemble $C^{(p)}$ intérieur à C; c'est un point limite de l'ensemble formé par la frontière [1] de $C^{(p)}$; il suffit pour prouver que la fonction est nulle en A, puisqu'elle est continue sur $C^{(p)}$, de démontrer qu'elle est nulle sur chacune des circonférences qui constituent cette frontière (on a déjà fait remarquer que chacune de ces circonférences est *intérieure* à $C^{(p+1)}$); or, sur l'une de ces circonférences (comme sur toute courbe rectifiable tracée dans le plan), les points qui font partie de Γ sont denses partout; la fonction continue sur cette courbe est donc nulle partout sur cette courbe si elle est nulle en tous les points de Γ.

Lorsque nous parlerons d'un domaine réduit, nous admettrons

---

[1] Nous négligeons les points A qui seraient intérieurs à C au sens de Weierstrass; pour eux la proposition est évidente, puisqu'ils sont centres de cercles ne renfermant à leur intérieur aucun a_n, ils sont aussi intérieurs à Γ au sens de Weierstrass.

qu'il s'agit d'un domaine bien déterminé, les ρ_n étant choisis d'une manière précise, satisfaisant aux inégalités (2) et (3). Il pourra arriver que nous ayons à considérer simultanément un autre domaine Γ' défini par des nombres ρ'_n; si l'on a

$$\rho'_n = \rho_n^{\frac{1}{\beta}}, \tag{4}$$

nous dirons que Γ' est d'ordre β par rapport à Γ; si le nombre β est supérieur à l'unité, il est clair que les nombres ρ'_n vérifient les inégalités (2) et (3) du moment que les ρ_n les vérifient; en ce cas, l'ensemble $\Gamma'^{(p)}$ est intérieur à $\Gamma^{(p)}$, car les cercles exclus de rayons $\frac{\rho'_n}{2^p}$ sont plus grands que les cercles de rayons $\frac{\rho_n}{2^p}$ (puisqu'on peut évidemment toujours supposer $\rho_n < 1$).

Remarquons enfin que les points de $C^{(p)}$ situés sur une courbe quelconque, sur une droite pour fixer les idées, y forment un ensemble parfait, défini par des intervalles contigus (au sens de M. Baire), cordes interceptées par les cercles sur la droite. Cet ensemble peut ou non comprendre des intervalles; mais, en tout cas, il est parfait, et par suite une fonction continue sur $C^{(p)}$ et nulle en tous les points qui limitent les intervalles contigus est nulle en tous les points de l'ensemble ainsi que toutes ses dérivées sur $C^{(p)}$.

II. — La fonction monogène.

Nous dirons qu'une fonction $f(z)$ est monogène dans un domaine tel que C si :

1° Elle est continue *dans* C (c'est-à-dire, comme nous l'avons expliqué, continue sur tout $C^{(p)}$, *intérieur* à C; *l'ensemble* $C^{(p)}$ *étant parfait, la continuité sur* $C^{(p)}$ *est uniforme*)[1];

2° Elle admet en tout point M de C, par rapport à $z = x + iy$, une dérivée unique et continue. Pour définir la dérivée, on considérera un des ensembles $C^{(p)}$ dont fait partie M et, désignant par

(1) L'uniformité de la continuité sur un ensemble parfait se démontre par l'absurde comme l'uniformité de la continuité dans un domaine ordinaire à deux dimensions parfait et borné par le procédé classique de la division en domaines emboîtés dont on a rencontré des exemples pages 7 et 8 de ce Livre.

M′ un autre point quelconque de $C^{(p)}$, on cherchera la limite du rapport

$$(5) \qquad \frac{f(M')-f(M)}{\overline{MM'}},$$

lorsque le vecteur $\overline{MM'} = z' - z$ tend vers zéro; si cette limite existe pour toute valeur de p, elle est évidemment indépendante de cette valeur de p, puisque tous les points de $C^{(p)}$ appartiennent à $C^{(p+q)}$; c'est pour cela que cette limite s'appellera la dérivée de $f(z)$ *dans* C, c'est-à-dire sur tout domaine *intérieur* à C. La continuité de la dérivée *dans* C s'entend comme la continuité de la fonction *dans* C : continuité sur tout $C^{(p)}$ *intérieur* à C. Cette hypothèse de la continuité de la dérivée est sans doute superflue; mais elle simplifie l'exposition.

Nous exigerons encore (¹) que le rapport différentiel $\frac{f(M')-f(M)}{\overline{MM'}}$ tende *uniformément* vers sa limite dans tout le domaine $C^{(p)}$ considéré auquel M appartient, c'est-à-dire, qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un nombre h tel que z_1 et z_2 appartenant à $C^{(p)}$, l'inégalité $|z_1 - z_2| < h$ entraîne

$$\left| \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2} - f'(z_1) \right| < \varepsilon.$$

L'ensemble $C^{(p)}$ *étant parfait, toute fonction continue sur* $C^{(p)}$ *est bornée sur* $C^{(p)}$ (²).

Nous allons démontrer la propriété fondamentale suivante de la fonction $f(z)$:

$$(6) \qquad \int_K f(z)\,dz = \sum_n \int_{S_n^{(p)}} f(z)\,dz,$$

la courbe K étant une courbe simple quelconque dont tous les points sont intérieurs à $C^{(p)}$, la somme $\sum_n$ se rapportant à tous

(¹) Par analogie avec les résultats trouvés page 8 [inégalité (2)] pour les fonctions monogènes ordinaires.

(²) La démonstration par l'absurde se fera très simplement en usant du procédé classique des divisions successives rappelé au 1°.

les cercles S_n^p qui sont à l'intérieur de K; les intégrales sont toutes prises dans le sens direct.

Nous poserons

$$(7)\qquad f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

de sorte que l'égalité (6) revient à deux égalités dont il suffit de démontrer l'une, par exemple

$$(8)\qquad \int_K P\,dx - Q\,dy = \sum_n \int_{S_n^{(p)}} P\,dx - Q\,dy.$$

Pour démontrer cette relation, nous allons définir une fonction $P_1(x, y)$, finie et bien déterminée en tous les points intérieurs à K, et coïncidant avec $P(x, y)$ aux points intérieurs à K qui appartiennent à $C^{(p)}$; il reste donc à définir $P_1(x, y)$ à l'intérieur des cercles $S_n^{(p)}$; sur la circonférence de ces cercles, elle coïncide avec $P(x, y)$. Nous définirons P_1 à l'intérieur du cercle par la condition que *sur les cordes du cercle parallèles à Oy elle varie linéairement* (sa valeur aux extrémités étant connue, puisqu'elle y coïncide avec P). La fonction P_1 ainsi définie est continue à l'intérieur de K et y admet en tout point une dérivée $\frac{\partial P_1}{\partial y}$; cette dérivée est bornée d'après l'hypothèse que les dérivées de P sont bornées [ce qui résulte de l'existence et de la continuité des dérivées de $f(z)$]; en effet, aux points intérieurs à $C^{(p)}$ la dérivée de P_1 coïncide avec la dérivée de P [1], aux points intérieurs à $S_n^{(p)}$

---

[1] Une explication complémentaire est peut-être ici nécessaire; à l'intérieur de $C^{(p)}$, P_1 coïncide avec P, mais P_1 est défini en des points où P n'est pas défini; peut-on dès lors conclure de l'existence de la dérivée de P, $\frac{\partial P}{\partial y}$, à l'existence de la dérivée de P_1, et au fait que cette dérivée est égale à celle de P.

Si l'on considère la représentation géométrique de $P(x, y)$ pour $x = x_0$ fixe et y variable, soit $z = P(x_0, y)$, et que l'on désigne par A_2 et A_3 les points (y_2, z_2), (y_3, z_3) qui correspondent à un intervalle contigu à $C^{(p)}$, $y_2 y_3$, on remplace z dans cet intervalle par une droite $A_2 A_3$; la pente de la droite $A_1 M$ qui joint le point (y_1, z_1) correspondant à un point y_1 de $C^{(p)}$ à un point quelconque M de cette droite $A_2 A_3$ est comprise entre les pentes $A_1 A_2$ et $A_1 A_3$ des droites qui joignent A_1 aux extrémités A_2 et A_3; par hypothèse les pentes de $A_1 A_2$ et $A_1 A_3$ tendent vers $\frac{\partial P}{\partial y}$ lorsque A_2 et A_3 tendent vers A_1; il en est de même de $A_1 M$, c'est-à-dire que $\frac{\partial P_1}{\partial y}$ existe et est égal à $\frac{\partial P}{\partial y}$.

la dérivée de P_1 est constante sur une corde parallèle à Oy et égale au quotient de la différence des valeurs de P_1 (c'est-à-dire de P) aux extrémités de la corde, par la longueur de cette corde. La différence des valeurs de P est, si l'on désigne par AB l'arc soustendu par la corde,

$$\int_{AB} \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy. \tag{9}$$

Cette intégrale est inférieure au produit par la longueur de l'arc AB de la somme $\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|$ et son quotient par la corde AB est au plus égal à

$$\frac{\pi}{2}\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right| + \frac{\pi}{2}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|,$$

et est par suite borné en même temps que les dérivées $\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|$. De même, les valeurs de P_1 étant comprises entre les valeurs de P, $|P_1|$ admet la même borne que $|P|$ [1].

On a, d'après un résultat classique, en désignant par (K) l'aire intérieur à K,

$$\int\int_{(K)} \frac{\partial P_1}{\partial y} dx\, dy = -\int_K P_1\, dx = -\int_K P\, dx,$$

puisque sur K, P_1 coïncide avec P.

De même, $Q_1(x, y)$ étant défini au moyen de $Q(x, y)$ de la même manière que P_1 au moyen de P (en prenant toutefois des parallèles à Ox au lieu de parallèles Oy) :

$$\int\int_{(K)} \frac{\partial Q_1}{\partial x} dx\, dy = \int_K Q_1\, dy = \int_K Q\, dy.$$

---

[1] La dérivée $\frac{\partial P}{\partial y}$ est discontinue aux points des circonférences; ceci n'a pas d'inconvénient pour les démonstrations; on peut éviter cette difficulté, si l'on veut, en modifiant la définition de P_1 (c'est-à-dire en raccordant par des courbes convenablement choisies au lieu de raccorder par des droites. On a des résultats assez simples en prenant la somme d'une parabole et d'une sinusoïde).

Ceux des lecteurs qui voudraient éviter ces calculs pourront se reporter à la Note I du présent Volume : *Sur l'extension de la formule de Green aux ensembles parfaits discontinus* où la formule de Green se trouve établie sans qu'il soit fait appel à la fonction auxiliaire P_1.

Il en résulte

$$(10) \qquad \int_K P\,dx - Q\,dy = -\int\int_{(K)} \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial x}\right) dx\,dy.$$

L'intégrale double du second membre se réduit à zéro pour les portions de l'aire (K) qui appartiennent à $C^{(p)}$, puisqu'en un point intérieur à $C^{(p)}$, on a

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

La formule (10) se réduit donc à

$$(11) \qquad \int_K P\,dx - Q\,dy = -\sum\int\int_{S_n^{(p)}} \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial x}\right) dx\,dy.$$

Mais l'aire de $S_n^{(p)}$ est égale à $\frac{\pi r_n^2}{4^p}$; d'autre part, les modules de $\frac{\partial P_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$ sont inférieurs à un nombre fixe indépendant de n (dépendant de p, mais p est fixe); on a donc

$$(12) \qquad \left|\int_K P\,dx - Q\,dy\right| < M\Sigma r_n^2.$$

Il est aisé de tirer de là la formule (6); la série $\sum r_n^2$ étant, en effet, convergente, nous pouvons choisir n de manière que le reste de cette série $\sum_{n+1}^{\infty} r_n^2$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{M}$. Le nombre n étant ainsi choisi, désignons par K′ le contour formé par le contour K parcouru dans le sens direct et les circonférences $S_1^{(p)}, S_2^{(p)}, \ldots, S_n^{(p)}$ parcourues dans le sens rétrograde; nous pourrons raisonner sur K′ comme nous avons fait sur K (en le complétant, si nous voulons, par des coupures rectilignes pour en faire un contour simple); nous obtiendrons ainsi

$$\left|\int_{K'} P\,dx - Q\,dy\right| < M\sum_{n+1}^{\infty} r_n^2 < \varepsilon,$$

c'est-à-dire, les intégrales étant prises dans le sens direct

$$\left|\int_K P\,dx - Q\,dy - \sum_1^n \int_{S_n^{(p)}} P\,dx - Q\,dy\right| < \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro, n croît indéfiniment, et l'on obtient bien la relation (8), d'où l'on conclut de suite la relation (6).

Nous allons, au moyen de (6), obtenir une expression analytique de $f(z)$ valable à l'intérieur du domaine réduit $\Gamma^{(p)}$. Soit x un point intérieur à $\Gamma^{(p)}$ et σ_q un cercle (¹) de centre x, intérieur à $C^{(p)}$ et dont le rayon soit compris entre $\frac{1}{2^q}$ et $\frac{1}{2^{q+1}}$.

Considérons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-x}$$

dans le domaine compris entre le contour K et σ_q; il est clair que

(¹) Il existe bien un tel cercle, quel que soit le nombre q (au moins à partir d'une certaine valeur de q). En effet, x étant intérieur à $\Gamma^{(p)}$, on a quel que soit n

$$|x-a_n| > \rho_n^{(p)} > \frac{\rho_n}{2^{p+1}}.$$

Par suite, les points a_n tels que l'on ait

$$|x-a_n| < \frac{1}{2^{q-1}},$$

sont tels que l'on a

$$(13) \qquad \frac{1}{2^{p+1}}\rho_n < \frac{1}{2^{q-1}}.$$

Désignons par n_q la plus petite des valeurs de n à partir de laquelle cette inégalité (13) est vérifiée; tous les a_n intérieurs au cercle de centre x et de rayon $\frac{1}{2^{q-1}}$ ont des indices supérieurs ou égaux à n_q; la somme $\Sigma r_n^{(p)}$ des rayons des cercles correspondants dans $C^{(p)}$ est donc extrêmement petite par rapport à $\frac{1}{2^{p+1}}\rho_{n_q}$ puisque les r_n sont beaucoup plus petits que les ρ_n correspondants [rappelons que l'on a

$$\frac{1}{\rho_n^2} < \log\log\frac{1}{r_n}$$

ou

$$r_n < e^{-e^{\frac{1}{\rho_n^2}}}\Bigg];$$

cette somme étant extrêmement petite par rapport à $\frac{1}{2^{q-1}}$ il existe des cercles de centre x et de rayon compris entre $\frac{1}{2^q}$ et $\frac{1}{2^{q+1}}$ (on le démontrera par le raisonnement déjà employé page 127 du présent Volume), et qui ne coupent aucun de ces cercles $S_n^{(p)}$; ils ne coupent pas *a fortiori* les cercles $S_n^{(p)}$ dont les centres sont plus éloignés de x, car les rayons $r_n^{(p)}$ de ces autres cercles sont très petits par rapport aux $\rho_n^{(p)}$ et leurs centres sont plus distants de x que $\frac{\rho_n}{2^{p+1}}$.

dans ce domaine cette fonction est monogène; nous obtenons donc la relation

$$\int_K \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \int_{\sigma_q} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \sum' \int_{S_n^{(p)}} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

la somme du second membre se rapportant aux $S_n^{(p)}$ qui sont compris entre K et σ_q.

Si l'on désigne par M le maximum de $|f(z)|$ dans $C^{(p)}$ le maximum de $|\varphi(z)|$ sur ces divers $S_n^{(p)}$ est évidemment 2^{q+1} M; si l'on remplace q par $q+1$, il s'introduit dans le second membre une infinité de nouveaux termes, mais il est aisé de voir [1] que les longueurs des chemins d'intégration (circonférences $S_n^{(p)}$ comprises entre σ_q et σ_{q+1}) ont une somme dont l'ordre de grandeur est de beaucoup inférieur à $\frac{1}{2^{q+1}}$; le second membre est donc une série convergente et l'on a

$$\lim_{q=\infty} \int_{\sigma_q} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_K \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \sum \int_{S_n^{(p)}} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

le signe Σ se rapportant maintenant à toutes les circonférences $S_n^{(p)}$ qui limitent $C^{(p)}$. Quant au premier membre, il résulte de la continuité de $f(z)$ au point x dans $C^{(p)}$, tous les σ_q étant intérieurs à $C^{(p)}$, qu'il est égal à $2\pi i f(x)$. On obtient donc la formule de Cauchy généralisée

$$(14) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \sum_n \frac{1}{2\pi i} \int_{S_n^{(p)}} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

On déduit de cette formule les conséquences classiques, et en particulier le fait que la *monogénéité* (*existence de la dérivée première*) *dans le domaine* C *entraîne l'existence des dérivées de tous les ordres* [2].

---

[1] Et nous omettons ce calcul pour ne pas alourdir l'exposition.

[2] En effet, la dérivation de la formule (14), r fois par rapport à x introduira une série de la forme

$$\sum_n \int_{S_n^{(p)}} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{r+1}},$$

et cette série sera absolument convergente comme on s'en rendra compte aisément, x étant intérieur à $\Gamma^{(p)}$ à cause de l'extrême petitesse des r_n par rapport aux ρ_n.

III. — Le prolongement par les séries (M).

Nous allons maintenant supposer que le point x est intérieur à un domaine réduit $\Gamma'^{(p)}$, d'ordre égal à 2 par rapport à $\Gamma^{(p)}$ (les cercles d'exclusion sont définis au moyen de nombre ρ'_n qui sont égaux à $\sqrt{\rho_n}$); il est alors évident que l'on peut tracer une infinité de droites issues du point x et intérieures à $\Gamma^{(p)}$. Plus précisément, si x appartient à $\Gamma'^{(p)}$, à l'intérieur de tout angle donné ayant son sommet en x, on peut trouver une droite intérieure à un $\Gamma^{(p')}$ d'indice convenable, cet indice p' pouvant croître indéfiniment lorsque l'angle tend vers zéro, mais étant déterminé lorsque l'angle est donné $\Big[$cela résulte de ce que la somme des angles sous lesquels on voit du point x les cercles qui limitent $\Gamma^{(p')}$ est inférieure au double de la somme de la série convergente $\sum\left(\frac{\rho_n}{2^{p'}} : \frac{\rho'_n}{2^{p}}\right)$ et est par suite aussi petite qu'on veut si p' est pris assez grand$\Big]$ (¹). Nous supposerons, pour ne pas compliquer les notations, que p a été pris dans ce qui précède égal à p' (le point x intérieur à $\Gamma'^{(p)}$ est intérieur *a fortiori* à $\Gamma'^{(p')}$ si $p' > p$).

Nous allons développer $f(x)$ en série sur une des droites que nous venons de définir, droite intérieure à $\Gamma^{(p)}$. Chacun des termes du second membre de (14) est une fonction analytique sur cette droite et peut, par suite, être développé en une série de polynomes de Mittag-Leffler ou (M); il suffit de montrer que la série multiple formée par l'ensemble de ces séries est *absolument convergente pour être assuré qu'elle représente* $f(x)$.

Cette série sera alors formée au moyen des dérivées de $f(x)$ au point x_0, dérivées qui existent, comme nous l'avons remarqué, d'après (14) pour tout déplacement sur la droite, et pour tout déplacement dans $\Gamma^{(p)}$, *de la même manière que le développement* (M) *d'une fonction analytique est formé au moyen des dérivées de cette fonction* (²); nous allons supposer, pour abréger l'écriture, $x_0 = 0$.

(¹) Le procédé de démonstration employé ici est identique à celui qui a été indiqué pages 66 et 67 du présent Volume.

(²) On comparera les considérations actuelles avec celles qui ont été exposées

Je rappelle les propriétés des développements (M) que j'ai démontrées dans mon Mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles (*Acta mathematica*, t. XXIV). On a

$$\frac{1}{1-z} = \Sigma\, G_n(z), \tag{15}$$

les $G_n(z)$ étant des polynomes qu'il est inutile de récrire et la série

$$\Sigma\,|\,G_n(z)\,|$$

étant convergente dans toute l'étoile. On considère le domaine $S(R, \rho)$ défini comme il suit : R étant > 1 et $\rho < 1$ on considère le cercle de centre O et de rayon R, le cercle de centre 1 et de rayon ρ et les tangentes à ce dernier cercle issues de O, tangentes dont les points de contact sont A′ et B′ ; le domaine $S(R, \rho)$ est limité par l'arc A′B′ plus petit que π, les prolongements A′A″ et B′B″ de OA′ et OB′ jusqu'à la circonférence de rayon R et l'arc A″B″ plus grand que π [1]. On a, dans ce domaine,

$$\int \frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = P(x_2, y_2) - P(x_1, y_1),$$

en posant $\dfrac{32\,R}{\rho} = \lambda$,

$$\Sigma\,|\,G_n(z)\,| < R^{\lambda\lambda}. \tag{16}$$

Considérons une intégrale le long d'une des circonférences $S_n^{(p)}$, de rayon $r_n^{(p)}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_n^{(p)}} \frac{f(z)\,dz}{z-x}, \tag{17}$$

nous la développons sur une droite intérieure à $\Gamma^{(p)}$, c'est-à-dire extérieure à la circonférence de même centre a_n que $S_n^{(p)}$ et de rayon $\rho_n^{(p)}$. Le rayon $r_n^{(p)}$ étant très petit par rapport à $\rho_n^{(p)}$, nous ne commettrons pas d'erreur sensible en remplaçant cette intégrale par la fonction majorante $\dfrac{M\,r_n^{(p)}}{a_n - x}$, en désignant par M le maximum

---

au Chapitre III de ce Livre, en particulier pages 61 et suivantes, mais alors la fonction $f(x)$ était analytique autour de l'origine.

[1] Le domaine $S(R, \rho)$ est un peu plus général que le domaine A_α introduit aux pages 49 et suivantes du Chapitre II de ce Livre.

de $|f(z)|$ dans $C^{(p)}$, $2\pi r_n^{(p)}$ étant la longueur du chemin d'intégration. Si l'on pose $x = a_n x'$, on a

$$\frac{M r_n^{(p)}}{a_n - x} = \frac{M r_n^{(p)}}{a_n} \frac{1}{1 - x'}. \tag{18}$$

Si le point x est intérieur à un domaine $S(R, \rho)$ défini par le cercle de centre $\rho_n^{(p)}$ de centre a_n et le cercle de rayon 2 qui comprend à son intérieur tous les domaines que nous considérons, le point $x' = \frac{x}{a_n}$ sera intérieur à un domaine $S\left(\frac{2}{|a_n|}, \frac{\rho_n^{(p)}}{|a_n|}\right)$ et l'on aura, pour le développement de $\frac{1}{1-x'}$, l'inégalité

$$\Sigma |G_n(x')| < \left[\frac{2}{|a_n|}\right]^{\lambda\lambda},$$

en posant $\lambda = \frac{64}{\rho_n^{(p)}}$; comme $|a_n|$ est supérieur à $\rho_n^{(p)}$, on peut écrire

$$\Sigma |G_n(x')| < \lambda\lambda^{\lambda}.$$

Le développement (M) de (17) est, d'après (18), lorsqu'on remplace tous les termes par leurs modules, inférieur à

$$\frac{M r_n^{(p)}}{|a_n|} \lambda\lambda^{\lambda}.$$

Mais on a, d'après (2),

$$\frac{1}{r_n} > e^{e^{\frac{1}{\rho_n^2}}}$$

ou, à un facteur près qui est fixe avec p,

$$\frac{1}{r_n^{(p)}} > e^{e^{\left[\frac{1}{\rho_n^{(p)}}\right]^2}}$$

et si n est assez grand $\left[\frac{1}{\rho_n^{(p)}}\right]^2 < \lambda^{\frac{3}{2}}$ puisque $\lambda = \frac{64}{\rho_n^{(p)}}$; on a donc, $|a_n|$ étant $> \rho_n^{(p)}$,

$$\frac{M r_n^{(p)}}{|a_n|} \lambda\lambda^{\lambda} < \lambda M \lambda\lambda^{\lambda} e^{-e^{\lambda^{\frac{3}{2}}}}$$

et ceci converge très rapidement vers zéro lorsque n, et par suite λ, augmentent indéfiniment. La convergence absolue de la série (M) est donc démontrée.

Considérons maintenant deux points x_1 et x_2 appartenant à Γ'; nous pouvons construire deux angles A_1 et A_2 de sommets x_1 et x_2 et tels que toute demi-droite D_1 intérieure à A_1 rencontre toute demi-droite D_2 intérieure à A_2 en un point x_3 intérieur au domaine total considéré. Nous pouvons choisir D_1 et D_2 de telle manière que ces deux droites appartiennent toutes deux à un même $\Gamma^{(p)}$ (p étant choisi assez grand, mais pouvant ensuite rester fixe). Il sera donc possible d'arriver à calculer la fonction en x_2 au moyen de ses valeurs et des valeurs de ses dérivées en x_1 en formant seulement deux développements (M), l'un d'origine x_1 et le second d'origine x_3. Si la fonction est nulle en x_1 ainsi que toutes ses dérivées, ces développements (M) sont identiquement nuls et la fonction est nulle en x_2. Il suffit de se reporter à ce que nous avons dit plus haut pour conclure que si une fonction monogène est nulle en tous les points d'un arc si petit qu'il soit (en tous les points de cet arc intérieurs à C), comme il existe sur cet arc au moins un point intérieur à $\Gamma^{(p)}$ limite de points intérieurs à $\Gamma^{(p)}$, la fonction étant nulle en tous ces points est nulle, ainsi que ses dérivées, en au moins un point de $\Gamma^{(p)}$, par suite identiquement nulle dans $\Gamma^{(p)}$ (quel que soit p), et identiquement nulle dans C. Nos nouvelles fonctions monogènes possèdent donc bien la propriété fondamentale des fonctions analytiques, l'unicité du prolongement : si deux fonctions sont monogènes dans un domaine de Cauchy et si en tout point d'un arc arbitrairement petit intérieur à ce domaine elles coïncident ainsi que toutes leurs dérivées, elles coïncident dans tout le domaine C.

Je voudrais indiquer un exemple aussi simple que possible de domaine C et de fonction monogène dans ce domaine. Formons la série

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} \frac{e^{-e^{n^4}}}{z - \dfrac{p+qi}{n}}.$$

Il est clair que cette série est convergente à l'intérieur du carré A dont les sommets sont les points $z = 0, 1, i, 1+i$. A l'intérieur de ce carré, la série admet une infinité de pôles, à savoir tous les points dont les coordonnées sont des nombres rationnels $x = \dfrac{p}{n}$,

$y = \frac{q}{n}$. Mais il est aisé de voir que, si l'on considère les cercles ayant pour centres ces pôles et pour rayons $\frac{\varepsilon}{n^4}$, la série est absolument et uniformément convergente en tous les points extérieurs à ces cercles, quel que soit le nombre fixe ε. Il en est de même si l'on considère les cercles ayant pour centres les points $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$ et pour rayons $\frac{1}{h} e^{-e^{n^2}}$, h étant un nombre entier fixe que nous nous réservons de faire croître indéfiniment. J'appellerai Γ_h l'ensemble de ces derniers cercles et C_h l'ensemble des points qui ne sont intérieurs à aucun des cercles Γ_h. On remarque que, pour simplifier, je désigne tous les cercles par Γ_h au lieu d'écrire $\Gamma_h^{(n)}$. Les propriétés élémentaires des nombres quadratiques permettent de prouver très aisément que toute droite telle que la suivante,

$$2x + 3y - \sqrt{7} = 0,$$

appartient à C_h pour une valeur finie de h.

La fonction $f(z)$ est évidemment monogène dans le domaine C_h; elle admet en effet, en chaque point de ce domaine, une dérivée unique bien déterminée, que l'on obtient en dérivant la série terme à terme. La valeur de cette dérivée est indépendante de la manière dont l'accroissement Δz tend vers zéro, sous la réserve bien entendu que z et $z + \Delta z$ soient intérieurs à C_h.

IV. — Les intégrales doubles analogues a l'intégrale de Cauchy [1].

Considérons une fonction analytique uniforme, régulière et nulle à l'infini. Si C est un cercle tel que tous les points singuliers de la fonction soient intérieurs à C, on a, ζ étant un point quelconque extérieur à C,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{\zeta - z},$$

l'intégration étant effectuée dans le sens direct.

---

[1] *Voir* E. Borel, *Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes* (*Congrès de Cambridge*, août 1912).

Soient C_1 et C_2 deux cercles concentriques extérieurs à C, a le centre de ces cercles, r_1 et r_2 leurs rayons. On a évidemment, r étant compris entre r_1 et r_2,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})\, re^{i\theta}\, d\theta}{\zeta - a - re^{i\theta}}.$$

Multiplions cette égalité par $(r_2 - r)^m(r - r_1)^n$ et intégrons entre les limites r_1 et r_2; il vient

$$f(\zeta)\int_{r_1}^{r_2}(r_2 - r)^m(r - r_1)^n\, dr$$
$$= \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{f(a + re^{i\theta})(r_2 - r)^m(r - r_1)^n e^{i\theta} r\, dr\, d\theta}{\zeta - a - re^{i\theta}}.$$

Posons

$$\int_{r_1}^{r_2}(r_2 - r)^m(r - r_1)^n\, dr = \frac{1}{2\pi A_{m,n}},$$
$$a + re^{i\theta} = x + iy,$$

d'où

$$r\, dr\, d\theta = dx\, dy\,;$$

il viendra

$$f(\zeta) = \int\int_{C_1 C_2} \frac{A_{m,n} f(x + iy)(r_2 - r)^m(r - r_1)^n e^{i\theta}\, dx\, dy}{\zeta - x - iy},$$

ce que l'on peut écrire, en posant $\zeta = \xi + i\eta$,

$$f(\zeta) = \theta(\xi, \eta) = \int\int_{C_1 C_2} \frac{\Phi(x, y)\, dx\, dy}{\xi + i\eta - x - iy},$$

le domaine d'intégration étant la couronne comprise entre les cercles C_1 et C_2.

Nous définirons la fonction $\Phi(x, y)$ à l'extérieur de cette couronne en lui attribuant la valeur zéro; on peut alors prendre comme domaine d'intégration tout le plan. La fonction $\Phi(x, y)$ est bornée et continue dans tout le plan; ses dérivées sont aussi bornées, du moins jusqu'à l'ordre m sur C_1 et jusqu'à l'ordre n sur C_2; par un artifice analogue à celui que nous allons employer, il serait aisé de s'arranger pour que *toutes* les dérivées soient continues; il suffit généralement de savoir que les dérivées sont continues jusqu'à un ordre fixé d'avance.

Si la fonction $f(z)$ admet un seul point singulier a, on peut

faire tendre r_1 vers zéro et si, de plus, le produit $r^m f(z)$ reste fini pour $z=a$, la formule subsiste pour $r_1 = 0$; si ce produit ne restait pas fini, on remplacerait dans la formule $(r-r_1)^m$ par $e^{-\frac{1}{r}}$ ou par $e^{-e^{\frac{1}{r}}}$, etc. De plus, dans le cas d'un point singulier unique, le cercle C_2 peut être pris de rayon aussi petit que l'on veut, après que le cercle C_1 a été réduit à zéro.

On déduit aisément de là que toute fonction analytique, uniforme, régulière et nulle à l'infini peut être représentée, en tout domaine D *intérieur* à son domaine d'existence W, et aussi voisin que l'on veut de W, par une expression de la forme

$$(1) \qquad f(\zeta) = \theta(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x, y)\, dx\, dy}{\xi + i\eta - x - iy},$$

la fonction $\Phi(x, y)$ étant bornée et, de plus, nulle en tous les points de D [cette hypothèse entraîne que la fonction $\Phi(x, y)$ est nulle à l'infini, puisque le point à l'infini appartient à D].

Inversement, toute expression de la forme (1) dans laquelle $\Phi(x, y)$ est une fonction bornée, nulle à l'infini, continue dans tout le plan, ainsi que ses dérivées (au moins jusqu'à l'ordre m) représente une fonction qui est monogène en tout point où $\Phi(x, y)$ est nul; car on a, par un calcul facile,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + i\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 2\pi\Phi(\xi, \eta).$$

Si les points où $\Phi(x, y)$ est nul forment un domaine W, la théorie des fonctions analytiques nous apprend que la fonction $\theta(\xi, \eta)$ est déterminée en tout point de W par la connaissance de ses valeurs au voisinage d'un point particulier quelconque de W. Le problème de la détermination générale du domaine d'existence des fonctions monogènes peut donc être posé comme il suit : déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire $\Phi(x, y)$ pour que cette propriété fondamentale de $\theta(\xi, \eta)$ subsiste, c'est-à-dire pour que la connaissance de cette fonction sur un arc de courbe où elle est monogène permette de calculer sa valeur dans tout son domaine de monogénéité.

Avant d'aborder le problème dans sa généralité, revenons pen-

dant quelques instants sur les séries de fractions rationnelles que nous avons considérées. On a, en désignant par C_0 un cercle de centre z_0 et de rayon ρ, en supposant ζ extérieur à ce cercle, et posant $|z - z_0| = r$,

$$\frac{1}{\zeta - z_0} = \int\int_{C_0} \frac{3(\rho - r)}{\pi\rho^3} \frac{dx\,dy}{\zeta - z}.$$

Lorsque le point ζ est intérieur au cercle C_0, l'intégrale se calcule aisément; si l'on pose $\left|\frac{\zeta - z_0}{\rho}\right| = \lambda$, sa valeur est

$$(3\lambda^2 - 2\lambda^3)\frac{1}{\zeta - z_0}.$$

La fonction

$$\theta_0(\xi, \eta) = \int\int_{C_0} \frac{3(\rho - r)}{\pi\rho^3} \frac{dx\,dy}{\xi + i\eta - x - iy}$$

est donc bornée dans tout le plan; à l'extérieur de C_0 elle est monogène et coïncide avec la fonction analytique $\frac{1}{\zeta - z_0}$. On peut évidemment définir d'une manière analogue une infinité de fonctions $\theta_n(\xi, \eta)$, telles que l'égalité

$$\theta_n(\xi, \eta) = \frac{A_n}{\zeta - a_n}$$

ait lieu pour tout point $\zeta = \xi + i\eta$ extérieur au cercle C_n de centre a_n et de rayon ρ_n, ces fonctions étant de plus *bornées et continues* dans tout le plan; si les $|a_n|$ sont bornés et si les coefficients A_n sont tels que la série

$$\sum \frac{|A_n|}{\rho_n^3}$$

soit convergente, la série

$$\theta(\xi, \eta) = \Sigma\theta_n(\xi, \eta)$$

sera absolument et uniformément convergente dans tout le plan, et représentée par une intégrale de la forme

$$\theta(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x, y)\,dx\,dy}{\xi + i\eta - x - iy}, \tag{2}$$

la fonction $\Phi(x, y)$ étant la somme d'une série partout convergente, dont les termes respectifs sont nuls à l'extérieur des divers cercles C_n; cette fonction $\Phi(x, y)$ est donc nulle en tous les points extérieurs à tous ces cercles et la fonction $\theta(\xi, \eta)$ est monogène en ces points. Si les rayons ρ_n sont remplacés par $\varepsilon\rho_n$, ε étant aussi petit qu'on veut, la fonction $\Phi(x, y)$ est nulle dans une région de plus en plus étendue; elle reste bornée, mais sa borne augmente indéfiniment lorsque ε tend vers zéro. On est ainsi conduit à considérer *a priori* une intégrale telle que (2), et à l'étudier dans les régions où $\Phi(x, y)$ est nul. Il faut évidemment partir d'une région C d'un seul tenant; nous nous bornerons au cas où cette région C se compose de domaines W (ces domaines pouvant comme cas limite se réduire à zéro) et d'un nombre fini ou d'une infinité de droites Δ, de telle manière que deux points quelconques puissent être réunis par une ligne polygonale d'un nombre fini de côtés.

Une notion importante est celle de l'ordre d'infinitude de la fonction $\Phi(x, y)$ au voisinage des droites Δ. J'ai pu démontrer la convergence des développements (M) en faisant l'hypothèse que cette fonction $\Phi(x, y)$ non seulement est nulle sur les droites Δ (ce qui est la condition indispensable de monogénéité), mais tend très rapidement vers zéro dans le voisinage de chaque droite. Plus précisément, σ désignant la distance du point (x, y) à la droite Δ considérée, on suppose que le produit

$$e^{e^{\frac{1}{\sigma^2}}}\Phi(x, y)$$

tend uniformément vers zéro lorsque σ tend vers zéro. Moyennant cette hypothèse, on peut affirmer que la fonction $\theta(\xi, \eta)$ est déterminée dans tout son domaine d'existence par la connaissance de ses valeurs en un point quelconque de ce domaine. Cette hypothèse comprend comme cas particulier la condition vérifiée par les fonctions analytiques dans les domaines W, car si une droite est intérieure à un domaine W, la fonction $\Phi(x, y)$ est identiquement nulle en tous les points dont la distance à la droite est inférieure à un nombre σ convenablement choisi.

Le domaine C peut se réduire à l'axe réel; tel est le cas pour la

fonction [1]

$$\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-e^{\frac{1}{y^2}}}\,dx\,dy}{(x^2+y^2)(\xi - x - iy)}.$$

Le développement de Taylor

$$\theta(\xi) = \theta(\xi_0) + (\xi - \xi_0)\,\theta'(\xi_0) + \ldots$$

diverge quel que soit ξ_0, mais est, quel que soit ξ_0, sommable (M) [2] pour toute valeur de ξ, sa somme étant bien égale à la fonction $\theta(\xi)$.

---

(1) Voir *Comptes rendus*, mai et juin 1912.

(2) C'est-à-dire que le développement (M) formé avec les valeurs de $\theta(\xi)$ et de ses dérivées au point ξ_0 converge quel que soit ξ, et sa somme a pour valeur $\theta(\xi)$.



NOTE I.

SUR L'EXTENSION DE LA FORMULE DE GREEN AUX ENSEMBLES PARFAITS DISCONTINUS.

1. — Définition du domaine.

Considérons un domaine borné D (par exemple, pour fixer les idées, le cercle $|z| \leqq 1$) et l'ensemble parfait E obtenu en excluant de ce domaine les points *intérieurs* à une infinité de cercles S_p dont les centres a_p sont denses au moins dans certaines aires, dont les rayons r_p sont les termes d'une série convergente et dont les circonférences n'ont, deux à deux, aucun point commun [1]; tous les points de ces circonférences appartiennent par suite à E. La série des r_p est supposée converger assez rapidement pour que le reste soit toujours inférieur au quart du dernier terme

$$\sum_{p+1}^{\infty} r_k < \frac{1}{4} r_p.$$

2. — Définition de la fonction monogène.

Soit $f(z)$ une fonction définie en tous les points de E; cette fonction sera dite *monogène* si elle est continue sur E et admet une dérivée continue vers laquelle le rapport différentiel tend *uniformément*. En d'autres termes, à tout terme positif ε, on peut faire correspondre un nombre h et à tout point z de E deux nombres $f(z)$ et $f'(z)$ tels que, z_1 et z_2 appartenant à E, l'inégalité

$$|z_1 - z_2| < h \tag{1}$$

entraîne

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} - f'(z_1) \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

---

[1] Il n'y a pas lieu de considérer le cas où l'un des cercles S_p serait intérieur à un autre de ces cercles; il n'y aurait qu'à le supprimer purement et simplement, puisque les points intérieurs seraient déjà exclus. Tous les cercles S_p sont donc extérieurs les uns aux autres.

L'inégalité (2) entraîne évidemment la conséquence que les fonctions $f(z)$ et $f'(z)$ sont continues et bornées dans E. Pour ne pas compliquer les notations, nous admettrons que la valeur h que l'on a fait correspondre à ε est telle que l'inégalité (1) entraîne

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon, \tag{3}$$
$$|f'(z_1) - f'(z_2)| < \varepsilon, \tag{4}$$

et nous désignerons par M un nombre tel que l'on ait, quel que soit z dans E,

$$|f(z)| < \mathrm{M}, \tag{5}$$
$$|f'(z)| < \mathrm{M}. \tag{6}$$

Il est aisé de se rendre compte que les séries de fractions rationnelles considérées plus haut satisfont à la définition de la fonction monogène. Plus généralement, les $\varphi_n(z)$ étant des fonctions analytiques dont chacune est uniforme dans D et n'admet dans ce domaine qu'un seul point singulier, on peut déterminer des nombres ε_n tels que les relations

$$|\mathrm{A}_n| < \varepsilon_n$$

entraînent la conséquence que la série

$$\Sigma\, \mathrm{A}_n\, \varphi_n(z)$$

représente une fonction monogène dans un certain domaine E obtenu en définissant convenablement les cercles d'exclusion S_p [dont les centres seront les points singuliers des fonctions $\varphi_n(z)$].

3. — Dérivée et intégrale le long d'une courbe.

Considérons d'abord une courbe continue rectifiable Γ dont tous les points appartiennent à E. Les valeurs de $f(z)$ sur Γ sont une fonction continue $\varphi(s)$ de l'arc s de Γ, admettant une dérivée $\varphi'(s)$; on a

$$\varphi'(s) = f'(z)\frac{dz}{ds} = f'(z)\, e^{i\alpha},$$

α désignant l'angle avec Ox de la tangente à la direction positive de Γ (sens des arcs croissants). Par définition, $\theta(z)$ étant une fonction continue sur Γ, on posera

$$\int_\Gamma \theta(z)\, dz = \int_\Gamma \theta(z)\frac{dz}{ds}\, ds.$$

On en conclut que, z_1 et z_2 étant deux points de Γ, on a

$$\int_{z_1(\Gamma)}^{z_2} f'(z)\,dz = f(z_2) - f(z_1). \tag{7}$$

Considérons maintenant une droite [1] C qui est coupée par une infinité de cercles S_p; les points d'intersection de S_p avec C étant a_p et b_p, les points de E situés sur C s'obtiennent en excluant les points intérieurs aux segments $a_p b_p$: ils forment un ensemble parfait E′, qui, dans le cas général, n'est dense nulle part sur C.

Complétons l'ensemble E′ en lui adjoignant les arcs $a_p b_p$ des cercles S_p inférieurs (ou au plus égaux) à une demi-circonférence. L'ensemble E'_1 ainsi complété est continu et la fonction $f'(z)$ est continue sur cet ensemble. Par définition, l'intégrale

$$\int_{z_1(E'_1)}^{z_2} f'(z)\,dz$$

sera égale à la somme des intégrales sur l'ensemble E′ et sur les arcs $a_p b_p$; l'intégrale sur E′ est elle-même, par définition, égale à la limite vers laquelle tend, lorsque les μ_i tendent vers zéro,

$$\Sigma f'(z_i)\mu_i,$$

$f'(z_i)$ étant la valeur de $f(z)$ en un point du segment $c_i d_i$, μ_i étant la mesure de la partie de E′ intérieure à $c_i d_i$. Nous allons démontrer que la relation (7) subsiste lorsqu'on substitue E'_1 à Γ; pour cela, donnons-nous un nombre arbitrairement petit ε, et déterminons d'une part un nombre h tel que l'inégalité (1) entraîne l'inégalité (2) et un nombre p tel que $r_p < \varepsilon$. Considérons, s'il y a lieu, les cercles d'indice inférieur à p rencontrant la droite D entre z_1 et z_2; soient $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., $a_k b_k$ les segments de D intérieurs à ces cercles dans l'ordre où ils se présentent entre z_1 et z_2; nous diviserons les segments $z_1 a_1$, $b_1 a_2$, $b_2 a_3$, ..., $b_k z_2$ en intervalles de longueur inférieure à h; soient $c_i d_i$ un de ces intervalles, $d_i - c_i$ sa longueur [2] et μ_i la mesure des points de E'_1 intérieurs à $c_i d_i$; on a

$$d_i - c_i = \mu_i + \varepsilon_i, \tag{8}$$

ε_i étant égal à la somme des intervalles $a_n b_n$ intérieurs à $c_i d_i$; l'indice n étant supérieur à p, la somme des ε_i est inférieure à deux fois la somme

(1) Les considérations qui suivent s'appliquent sans difficulté au cas où C, au lieu d'être une droite, est une courbe rectifiable ne présentant pas de singularités exceptionnelles (ne rencontrant, en général, un cercle S_p qu'en deux points, sauf pour un nombre limité de S_p).

(2) Nous admettons que c_i et d_i désignent à la fois les extrémités de l'intervalle et leurs distances à un point fixe de D.

des r_k d'indice supérieur à p et, par suite, inférieure à r_p; on a donc

$$\Sigma \varepsilon_i < \varepsilon.$$

L'arc $a_n b_n$ inférieur (ou au plus égal) à une demi-circonférence que sous-tend la corde $a_n b_n$ est au plus égal à $\pi a_n b_n$; la somme des arcs analogues est inférieure à $\pi\varepsilon$.

La relation (2) peut s'écrire ($d_i - c_i$ étant inférieur à h)

$$(9) \qquad f(d_i) - f(c_i) = (d_i - c_i) f'(z_i) + 2\theta\,\varepsilon(d_i - c_i),$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1. On a d'ailleurs

$$(10) \qquad \int_{c_i(E')}^{d_i} f'(z)\,dz = \mu_i[f'(z_i) + \theta'\varepsilon]$$

et

$$(11) \qquad \int_{c_i(E'_1)}^{d_i} f'(z)\,dz = \int_{c_i(E')}^{d_i} f'(z)\,dz + \theta'' M \pi \varepsilon_i,$$

car la différence entre l'intégrale sur E'_1 et l'intégrale sur E' consiste en l'intégrale sur les arcs $a_n b_n$ dont la longueur totale est inférieure à $\pi\varepsilon_i$ et sur lesquels $f'(z)$ est inférieur à M.

Les relations (8), (9), (10), (11) donnent immédiatement

$$(12) \qquad \int_{c_i(E'_1)}^{d_i} f'(z)\,dz = f(d_i) - f(c_i) + \theta_1 \varepsilon \mu_i + \theta_2 \varepsilon_i \mu_i + \theta_3 M \pi \varepsilon_i,$$

θ_1, θ_2, θ_3 étant compris entre -1 et $+1$.

En ajoutant toutes les égalités analogues à (12) pour tous les arcs $c_i d_i$ et les égalités [qui résultent de (7)]

$$\int_{a_h(S_h)}^{b_h} f'(z)\,dz = f(b_h) - f(a_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, k),$$

on obtient

$$(13) \qquad \int_{z_1(E'_1)}^{z_2} f'(z)\,dz = f(z_2) - f(z_1) + \theta M \varepsilon(\pi + 2),$$

θ étant toujours compris entre -1 et $+1$. Le nombre M étant indépendant de ε, qui a pu être choisi arbitrairement petit, cette relation (13) entraîne bien la relation à démontrer

$$(14) \qquad \int_{z_1(E'_1)}^{z_2} f'(z)\,dz = f(z_2) - f(z_1).$$

Si l'on désigne par $a_n b_n$ *tous* les segments contigus à E' compris

entre z_1 et z_2 cette relation équivaut à la suivante :

$$(15)\qquad \int_{z_1\,\mathrm{E}'}^{z_2} f'(z)\,dz = f(z_2) - f(z_1) - \Sigma[f(b_n) - f(a_n)].$$

Sous cette forme, elle peut être regardée comme intuitive, mais il n'était pas superflu, vu son importance, de la démontrer rigoureusement.

4. — Formule de Green.

Posons

$$f(z) = \mathrm{P}(x, y) + i\,\mathrm{Q}(x, y).$$

Nos hypothèses sur la monogénéité de $f(z)$ entraînent l'existence et la continuité dans E des dérivées partielles de P et de Q, ainsi que les relations

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}.$$

Par définition, Σ étant une courbe rectifiable dont la tangente fait un angle α avec Ox (directions positives), on a

$$\int_\Sigma \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy = \int_\Sigma (\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\sin\alpha)\,ds.$$

Les formules (7), (14) et (15) sont équivalentes aux suivantes :

$$(7')\qquad \int_{x_1, y_1 (\Gamma)}^{x_2, y_2} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}dy = \mathrm{P}(x_2, y_2) - \mathrm{P}(x_1, y_1),$$

$$(14')\qquad \int_{x_1, y_1 (\mathrm{E}_1)}^{x_2, y_2} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}dy = \mathrm{P}(x_2, y_2) - \mathrm{P}(x_1, y_1),$$

$$(15')\qquad \int_{x_1, y_1 (\mathrm{E}_1)}^{x_2, y_2} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}dy = \mathrm{P}(x_2, y_2) - \mathrm{P}(x_1, y_1) - \Sigma[\mathrm{P}(b_n) - \mathrm{P}(a_n)],$$

en désignant par $\mathrm{P}(b_n)$ la valeur de $\mathrm{P}(x, y)$ lorsqu'on y remplace x et y par les coordonnées du point b_n.

Considérons une aire K dont le contour (K) appartient à E; soient S_n les S_p intérieurs à K; la formule de Green généralisée est la suivante :

$$(16)\qquad \int\int_{\mathrm{K}} -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\,dx\,dy = \int \mathrm{P}\,dx - \sum \int_{(\mathrm{S}_n)} \mathrm{P}\,dx.$$

Pour démontrer cette formule, donnons-nous un nombre arbitrairement

petit ε et déterminons un nombre p tel que $r_p < \varepsilon$; désignons par S_1, $S_2, \ldots, S_k$ ceux des cercles S_n dont l'indice n est inférieur à p. Nous considérons l'aire (k fois connexe) K_1 intérieure à K et extérieure à S_1, $S_2, \ldots, S_k$; le nombre ε étant donné, nous déterminerons h_1 par la condition que les relations

$$(17) \qquad \begin{cases} |x_1 - x_2| < h_1, \\ |y_1 - y_2| < h_1, \end{cases}$$

entraînent

$$(18) \qquad \begin{cases} |P(x_1, y_1) - P(x_2, y_2)| < \varepsilon, \\ \left|\dfrac{\partial P(x_1, y_1)}{\partial y_1} - \dfrac{\partial P(x_2, y_2)}{\partial y_2}\right| < \varepsilon, \end{cases}$$

en désignant par $\dfrac{\partial P(x_1, y_1)}{\partial y_1}$ la valeur de $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ pour $x = x_1$, $y = y_1$; nous déterminerons ensuite un nombre h_2 tel que, si l'on divise le plan en rectangles dont tous les côtés sont inférieurs à h_2, la surface totale de ceux de ces rectangles qui sont traversés par les contours K, $S_1, S_2, \ldots, S_k$ soit inférieure à ε; nous supposons de plus h_2 assez petit pour satisfaire à la condition suivante : tout ensemble de rectangles de côtés inférieurs à h_2 intérieurs à K et extérieurs à $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sera limité par un contour polygonal Π (formé de parallèles aux axes et se composant de plusieurs lignes fermées) suffisamment voisin de K, $S_1, S_2, \ldots, S_k$ pour que, si l'on désigne par MN un arc quelconque d'un des contours K, $S_1, S_2, \ldots, S_k$ assez petit pour que toute parallèle à Oy ne le rencontre qu'en un point, on puisse faire correspondre à MN une portion M′N′ du contour polygonal Π tel que l'on puisse associer à chaque point A de MN un point A′ d'un des côtés parallèles à Ox dans M′N′ *de manière que la droite* AA′ *soit parallèle à* Oy *et de longueur inférieure à* h_1, la correspondance pouvant laisser de côté certains points A des contours K, $S_1, S_2, \ldots, S_k$ et certains points A′ des côtés parallèles à Ox du contour polygonal, *mais l'ensemble des points* A *et* A′ *laissés de côté* (pour lesquels la correspondance n'a pas lieu) *formant un ensemble d'ensembles linéaires de longueur totale inférieure à* ε. Nous prendrons h inférieur au plus petit des deux nombres h_1 et h_2 et nous diviserons l'aire K_1 en rectangles de côtés inférieurs à h par des parallèles aux axes choisies de manière à ne pas rencontrer les cercles S_{m+q} ($q \geqq 1$) tels que le rayon r_m du cercle S_m soit inférieur à h. Les cercles S_n intérieurs à K sont ainsi classés en trois catégories (après que ε a été fixé) : ceux, S′, dont l'indice est inférieur à p, ceux, S″, dont l'indice est supérieur à p, mais au plus égal à m et ceux, S‴, dont l'indice est supérieur à m. Nous désignerons par K_2 l'ensemble formé par les rectangles qui ne renferment aucun point de S′ ni de S″; chacun des cercles S‴ est à l'intérieur d'un de ces rectangles. La différence entre l'aire K et l'aire K_1 est inférieure à ε, puisque h est inférieure à h_2; la différence entre l'aire K_1 et l'aire K_2 est inférieure à six fois la somme des aires des cercles S″, c'est-à-dire inférieure à $6\varepsilon^2$. En effet,

lorsque le rayon d'un cercle est supérieur à h et que l'on a un quadrillage rectangulaire dont les côtés sont inférieurs à h, le plus petit des rectangles formé par l'assemblage de rectangles du quadrillage et auquel le cercle est entièrement intérieur a ses côtés au plus égaux au diamètre du cercle augmenté de $2h$; sa surface est au plus $(4r+h)^2$ celle du cercle étant πr^2 (¹). La différence entre l'aire K et l'aire K_2 est donc inférieure à 2ε et l'on a, par suite, M étant le maximum de $\frac{\partial P}{\partial y}$,

$$(19) \qquad \left| \int\int_K -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy - \int\int_{K_2} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \right| < \varepsilon.$$

Évaluons maintenant la différence entre les intégrales curvilignes

$$(20) \qquad \left[\int_{(K)} P\,dx - \sum \int_{S_n} P\,dx \right], \qquad \int_{(K_2)} P\,dx,$$

(K_2) étant le contour polygonal qui limite l'aire K_2 formée de rectangles, parcouru de manière que l'aire enveloppée K_2 soit à gauche. Tout d'abord en limitant la somme Σ aux S' (à l'exclusion des S'' et des S''') nous faisons une erreur inférieure à $2\pi\varepsilon M$ ($2\pi\varepsilon$ longueur totale des chemins d'intégration négligés; M maximum de P); de même, en supprimant de K_2 les contours des rectangles relatifs aux S'' nous faisons une erreur inférieure à $16\varepsilon M$, car le diamètre d'un des S'' étant inférieur à $2h$, les côtés des rectangles qui renferment ce cercle sont inférieurs à quatre fois son rayon. En définitive, la différence entre les intégrales (20) diffère au plus de $(16+2\pi)\varepsilon M$ de la différence

$$(21) \qquad \int_{(K)} P\,dx - \sum{}' \int_{(S_n)} P\,dx - \int_{(K_2')} P\,dx,$$

le signe Σ' s'appliquant aux seuls S_n de la catégorie S' et K_2' désignant le contour limitant l'assemblage des rectangles intérieurs au contour limité par K et par les S'. Le contour K_2' est l'un des contours que nous avions désignés par II; d'après la manière dont h_2 a été choisi, la différence (21) est inférieure à $2L\varepsilon + 2M\varepsilon$, L étant la longueur totale des contours K, S_1, S_2, ..., S_k, et M le maximum de la fonction P; cette différence provient en effet, d'une part, de la différence des intégrales sur les portions correspondantes (points A et A' situés sur une même parallèle à Oy) et de la valeur des intégrales sur les portions qui échappent à la correspondance.

En définitive, pour démontrer à εN près l'égalité (16), N étant un nombre

(¹) Nous avons négligé le cercle unique S_m dont le rayon est peut-être inférieur à h (on aura choisi m de manière que $r_{m-1} > h > r_m$).

fixe indépendant de ε, il suffit de démontrer, à $\varepsilon N'$ près, l'égalité

$$(22) \qquad \iint_{K_2} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{(K_2)} P\,dx.$$

L'aire K_2 est formée de rectangles R, de côtés inférieurs à h, et dont les côtés ne rencontrent aucun des cercles S; on a désigné par S''' ceux des S qui sont intérieurs aux rectangles R. Pour démontrer la relation (22) à $\varepsilon N'$ près nous allons chercher, pour chacun des rectangles R, une limite supérieure de la valeur absolue de la différence

$$(23) \qquad D = \iint_{R} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy - \int_{(R)} P\,dx,$$

l'intégrale le long de (R) se réduisant aux intégrales sur les deux côtés de R parallèles à Ox, prises dans le sens Ox pour le côté le plus rapproché de Ox et dans le sens opposé pour l'autre côté. Nous désignerons par σ la somme des aires des cercles S''' intérieurs au rectangle R considéré et nous évaluerons une limite supérieure de $|D|$ au moyen de deux termes dont l'un renfermera en facteur l'aire ρ du rectangle R et l'autre renfermera en facteur l'aire σ. Supposons d'abord que l'aire σ soit égale à zéro, c'est-à-dire que le rectangle R ne renferme à son intérieur aucun des cercles S_p et désignons pour un instant par a et b les dimensions du rectangle R ($a < h$, $b < h$). On a

$$(24) \qquad -\int_{(R)} P\,dx = \int_{x_1}^{x_1+a} (P_2 - P_1)\,dx,$$

en désignant par x_1, y_1 les coordonnées du sommet de R dont les coordonnées sont les plus faibles, par P_1 la valeur de P sur la droite $y = y_1$ et par P_2 la valeur de P sur la droite $y = y_1 + b$. Les valeurs correspondantes de P_2' et de P_1 pour une même valeur de x sont liées par la relation

$$(25) \qquad P_2(x, y_1 + b) - P_2(x, y_1) = \int_{y_1}^{y_1+b} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy.$$

Si l'on désigne par μ une des valeurs de $\frac{\partial P}{\partial y}$ à l'intérieur de R, toutes les valeurs de cette fonction de R sont comprises entre $\mu - \varepsilon$ et $\mu + \varepsilon$ et l'on a

$$(26) \qquad P(x, y_1 + b) - P(x, y_1) = b(\mu + \theta\varepsilon),$$

$$(27) \qquad \int_{x_1}^{x_1} (P_2 - P_1)\,dx = ab(\mu + \theta'\varepsilon),$$

$$(28) \qquad \iint_{R} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = ab(\mu + \theta_1\varepsilon).$$

Les relations (24), (25), (26), (27), (28) donnent, puisque $ab = \rho$,

$$D = ab(\mu + \theta'\varepsilon - \mu - \theta_1\varepsilon) = 2\rho\theta_2\varepsilon,$$

dans le cas où $\sigma = 0$.

Il faut maintenant tenir compte de la valeur de σ. L'existence à l'intérieur de R d'un cercle S_p modifie d'une part la formule (25) [et par conséquence (26) et (27)] et, d'autre part, la formule (28). Dans le cas où il y a à l'intérieur de R une infinité de S_p, la formule (25) doit être modifiée en prenant comme chemin d'intégration entre y_1 et $y_1 + b$ soit, non plus la ligne droite, mais cette ligne modifiée par la substitution des arcs des S_p (inférieurs à une demi-circonférence) aux cordes des S_p interceptées sur cette droite; on a dès lors

$$(25) \qquad P_2(x, y_1 + b) - P_2(x, y_1) = \int_{y_1}^{y_1+b} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy;$$

l'intégrale $\int_{y_1}^{y_1+b} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy$ s'évalue sur la nouvelle ligne d'intégration comme sur la droite : $b(\mu + \theta\varepsilon)$; mais il faut tenir compte des valeurs de $\int \frac{\partial P}{\partial x}\,dx$ le long des arcs de cercle adjoints à la ligne d'intégration : cette intégrale est au plus égale au produit de la longueur de ces arcs par le maximum M de $\frac{\partial P}{\partial x}$. La présence d'un cercle S_p modifie ainsi la valeur de $P_2 - P_1$ d'une quantité égale au plus à $2Mr_p$, cette modification ayant lieu au plus sur un segment $2r_p$ égal au diamètre de S_p; l'intégrale $\int (P_2 - P_1)\,dx$ est donc modifiée au plus de

$$2Mr_p . 2r_p = 4Mr_p^2 < 2M\sigma_p,$$

σ_p étant l'aire de S_p; la modification totale est donc au plus $2M\sigma$, σ étant la somme de l'aire des S_p intérieurs à ρ. On a donc, en définitive,

$$|D| < 2\varepsilon\rho + 2M\sigma.$$

En ajoutant toutes les inégalités analogues relatives à tous les rectangles R, on obtient

$$(29) \qquad \left| \int\int_{K_2} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy - \int_{(K_2)} P\,dx \right| < 2\varepsilon K_2 + 2M\varepsilon^2,$$

la somme des aires ρ étant désignée par K_2 et la somme des aires σ étant inférieure à ε^2.

La formule de Green généralisée (16) est donc démontrée à $N\varepsilon$ près, N étant un nombre fixe indépendant de ε : elle est donc exacte, puisque ε est arbitrairement petit.

On remarquera l'usage fréquent qui a été fait de l'intégration le long de chemins obtenus en complétant un ensemble parfait discontinu sur une droite par des arcs de cercles ayant pour cordes un intervalle contigu. En procédant par la méthode constructive [1], la définition des intégrales le long de tels chemins s'étendrait aisément à des cas bien plus généraux.

---

[1] *Voir* mon Mémoire *Sur le calcul des intégrales définies* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1912).

NOTE II.

SUR LA THÉORIE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE [1].

Soit $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ une fonction complexe des deux variables réelles x et y; je supposerai cette fonction partoût continue, et de plus nulle lorsque le point x, y est extérieur à un cercle suffisamment grand C. Si l'on pose

$$(1) \qquad \theta(\xi, \eta) = \int\int \frac{\varphi(x, y)\,dx\,dy}{x + iy - \xi - i\eta},$$

l'intégration étant étendue à tout le plan, la fonction $\theta(\xi, \eta)$ est de même nature que la fonction φ, sauf qu'elle n'est pas nulle en général à l'extérieur de C. On a d'ailleurs

$$(2) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\xi} + i\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = -2\pi\varphi(\xi, \eta),$$

de sorte que, dans les régions où $\varphi(\xi, \eta)$ est nul, $\theta(\xi, \eta)$ est une fonction monogène de $\xi + i\eta = \zeta$. Il est aisé de voir que toute fonction monogène, analytique au sens de Weierstrass, peut être représentée par une formule telle que (1) dans tout domaine parfait *intérieur* à son domaine d'existence, la fonction $\varphi(x, y)$ satisfaisant aux conditions indiquées plus haut. La restriction que le domaine soit parfait est une conséquence du fait évident que l'ensemble des points où une fonction continue s'annule est parfait. Le cas où le domaine d'existence comprend le point à l'infini n'est pas exclu; ce point doit être alors un point régulier, et l'on supposera que la fonction y prend la valeur zéro, par l'addition d'une constante convenable.

---

[1] Cette Note reproduit une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLIV, juin 1912, p. 1686-1688.

Donnons le nom de *densité* (¹) à la fonction $|\varphi(x, y)|$; le théorème fondamental de la théorie de Weierstrass s'énonce ainsi : « Si deux points A et B où la densité est nulle sont intérieurs à deux cercles pouvant être réunis par un nombre fini de cercles sécants, la densité étant nulle en tous les points intérieurs à tous ces cercles, la connaissance de $\theta(\xi, \eta)$ au voisinage de A détermine cette fonction au voisinage de B. »

Il serait naturel de dire que la fonction $\theta(\xi, \eta)$ est *monogène* en tout point où la densité est nulle; on est ainsi conduit à se demander si le théorème précédent se généralise lorsque ces points de monogénéité forment un ensemble quelconque d'un seul tenant. Je n'ai pu résoudre cette question sous sa forme la plus générale, mais je puis indiquer des cas assez étendus où l'on peut énoncer une proposition analogue à celle de Weierstrass.

Appelons *densité moyenne*, dans un cercle (C) de rayon r, l'expression

$$\mu(r) = \frac{1}{\pi r^2} \int\int_{(C)} |\varphi(x, y)|\, dx\, dy. \tag{3}$$

Si en un point A la densité est nulle, la densité moyenne $\mu(r)$ dans le cercle de centre A et de rayon r tend vers zéro avec r; soit $\psi(r)$ une fonction tendant vers zéro avec r; si l'on a, pour r assez petit,

$$\mu(r) < \psi(r), \tag{4}$$

nous dirons que la densité en A est asymptotiquement inférieure à $\psi(r)$. Si en tous les points d'une droite la relation (4) est vérifiée à partir d'une même valeur de r, nous dirons que la densité est asymptotiquement inférieure à $\psi(r)$ sur la droite.

Ces définitions étant posées, on peut fixer une fonction $\psi(r)$ telle que les droites Δ sur lesquelles la densité est asymptotiquement inférieure à $\psi(r)$ peuvent être adjointes au domaine d'existence, sans que le théorème fondamental cesse d'être exact : la connaissance de la fonction au voisinage de A détermine la fonction au voisinage de B si A et B peuvent être réunis par un nombre fini de droites Δ. [Il est évident que toute droite *intérieure*

(¹) On pourra appeler *masse totale* la valeur de l'intégrale, étendue à tout le plan,

$$\int\int |\varphi(x, y)|\, dx\, dy.$$

Pour représenter une fonction analytique dans un domaine de plus en plus voisin de son domaine d'existence, il faudra souvent utiliser une masse totale de plus en plus grande, la masse totale augmentant indéfiniment lorsque le domaine où $\varphi(x, y)$ est nul tend vers le domaine d'existence. Parmi les cas où la masse totale peut rester finie, citons celui d'une fraction rationnelle à pôles simples et celui des fonctions découvertes par M. Pompeiu et sur lesquelles M. Denjoy a récemment rappelé l'attention des géomètres.

au domaine de Weierstrass est une droite Δ, puisque sur une telle droite on a $\mu(r) = 0$ pour les valeurs de r inférieures à une valeur fixe.] Nous dirons que la fonction est monogène sur les droites telles que Δ.

La question se pose donc de déterminer la fonction $\psi(r)$ de manière que la validité du théorème soit aussi étendue que possible; je suis arrivé à démontrer que l'on peut prendre

$$(5) \qquad \log[-\log\psi(r)] = \frac{1}{r^{1+\varepsilon}},$$

ε étant une constante positive quelconque.

Pour donner un exemple précis, considérons la couronne Γ comprise entre les cercles $(c_1) : x^2+y^2=1$, $(c_2) : x^2+y^2=4$; et posons

$$(6) \qquad \theta(\xi, \eta) = \int\int_{\Gamma} \frac{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)\, e^{-e^{\frac{1}{y^2}}}\, dx\, dy}{x+iy-\xi-i\eta}.$$

La fonction ainsi définie est monogène à l'intérieur de (c_1) à l'extérieur de (c_2) et aussi sur les segments de l'àxe des x qui réunissent (c_1) et (c_2).

La connaissance des ses valeurs au voisinage d'un point quelconque de ce domaine d'existence la détermine dans tout le domaine.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

Préface ... v

Index ... xi

Chapitre I. — *Introduction. Généralités* ... 1

La fonction monogène d'une variable complexe ... 5

Les domaines de Weierstrass ... 10

La représentation d'une fonction analytique définie dans un domaine de Weierstrass ... 18

Chapitre II. — *Application de l'intégrale de Cauchy au développement en série de polynomes d'une fonction définie dans un domaine de Weierstrass* ... 24

Applications à quelques développements particuliers ... 38

Chapitre III. — *Quelques conséquences remarquables du développement en série de polynomes. L'extension de la théorie du prolongement analytique* ... 55

Chapitre IV. — *Les ensembles de mesure nulle* ... 73

Rappel des propriétés arithmétiques des fractions continues ... 73

Les ensembles réguliers de mesure nulle ... 81

Transformations sur les ensembles réguliers de mesure nulle ... 94

Chapitre V. — *Les domaines* C. *Les fonctions monogènes non analytiques définies dans les domaines de Cauchy* ... 125

Les domaines C ... 125

La fonction monogène ... 134

Le prolongement par les séries (M) ... 141

Les intégrales doubles analogues à l'intégrale de Cauchy ... 145

Note I. — *Sur l'extension de la formule de Green aux ensembles parfaits discontinus* ... 151

Définition du domaine ... 151

Définition de la fonction monogène ... 151

Dérivée et intégrale le long d'une courbe ... 152

Formule de Green ... 155

Note II. — *Sur la théorie du potentiel logarithmique* ... 161

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C[ie],
55303 Quai des Grands-Augustins, 55.

70295-23 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins